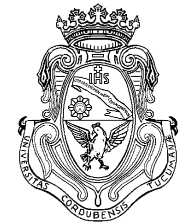


UNIVERSIDAD NACIONAL DE CORDOBA
FAC. DE CIENCIAS EXACTAS FISICAS Y NATURALES
REPUBLICA ARGENTINA

Programa de:

Estructuras Isostáticas (IA)

Código:

Carrera: IA.	Plan: 2005	Puntos: 3
Escuela: IMA	Carga horaria: 72	Hs. Sem.: 4,5
Departamento: Estructuras	Cuatrimestre:4ro	Año: 2do
Materia	Carácter: Obligatoria	

Objetivos:
Al finalizar la Asignatura, el alumno debe conocer perfectamente los siguientes puntos:
- Equilibrio de los cuerpos planos isostáticos, considerados indeformables, sometidos a fuerzas exteriores.
- Manejo perfecto del diagrama del cuerpo libre.
- Propiedades y ubicación del centro de gravedad de superficies.
- Estudio de los esfuerzos interiores en los enrejados planos articulados y en las vigas o sistemas de vigas de alma llena (siempre isostáticos).
- Introducción al equilibrio y esfuerzos interiores en el espacio y centro de gravedad de volumen.
- Utilización del principio de los desplazamientos virtuales como método para obtener el equilibrio de los cuerpos isostáticos indeformables e introducción a la energía potencial total de un sistema. (Noción de línea de influencia).

Programa Sintético (títulos del analítico):
Introducción
Cap.1 - Fuerzas concurrentes en el plano.
Cap.2 - Fuerzas paralelas en el plano (cuplas)
Cap.3 - Caso general de fuerzas en el plano.
Cap.4 - Cables
Cap.5 - Los enrejados articulados planos.
Cap.6 - Diagramas característicos en el plano.
Cap.7 - Fuerzas concurrentes en el espacio.
Cap.8 - Fuerzas paralelas en el espacio (cuplas)
Cap.9 - Caso general de fuerza en el espacio.
Cap.10 - Principio de los desplazamientos virtuales.

Programa analítico de foja 2 a foja 3

Bibliografía de foja 4 a foja 4

Correlativas obligatorias: Física I
Correlativas aconsejadas:

Rige: desde 2005

Aprobado por Res. HCD: Modificado/Anulado/Sust. Res. HCD:

Fecha: Fecha:

El Secretario Académico de la Fac. de C. E. F. y N. (U. N. C.) certifica que el programa está aprobado por el (los) número(s) y fecha(s) que anteceden. Córdoba,

LINEAMIENTOS GENERALES

Materia básica y fundamental para todas la carreras de Ingeniería. Clases teóricas y prácticas. Una calculadora tipo científica, lápiz, goma, regla y dos escuadras resultan imprescindibles.

METODOLOGÍA DE ENSEÑANZA

Las clases serán "Teórico-prácticas". El docente desarrollará gran parte de los temas teóricos y prácticos, dejando algunos temas más simples para que el alumno los estudie por su cuenta. La Cátedra proveerá APUNTES sobre el programa y una GUIA de Trabajos Prácticos.

EVALUACIÓN

Quincenalmente el alumno deberá probar su grado de aprendizaje con una evaluación Teórica-Práctica (parcialito) que resolverá en forma individual durante la clase y entregará para su corrección. El práctico entregado sirve como comprobante de presencia y participación en la clase. Para calcular el promedio de dichas evaluaciones, se tomarán las mejores notas que conformen el 70% del total.

Además se tomarán **DOS PARCIALES**, TEORICO-PRACTICO, y un **COLOQUIO INTEGRADOR**.

- El porcentaje de asistencia mínima es de 80% a las clases teórico-prácticas, tanto para la promoción como para la regularidad. (Habiendo aproximativamente 30 clases no se admiten más de 6 faltas.)
- Se tomarán dos parciales teórico-práctico durante el cuatrimestre. La aprobación de un parcial significa demostrar el conocimiento de un 60% de los temas solicitados.
- El alumno rendirá un coloquio oral sobre toda la materia. El coloquio se clasificará como los parciales con necesidad de un conocimiento de un 60% para aprobar.
- La nota final de **PROMOCIÓN** resulta de considerar 10% del promedio de las evaluaciones quincenales (parcialitos), 20% de cada parcial y 50% de la nota del coloquio. La nota de promoción debe ser superior a cuatro (4) y se deja asentada en la libreta.
- Para optar al régimen de promoción el alumno DEBE tener aprobada (o Regular) las materias correlativas a la fecha de rendir el primer parcial.
- El alumno que no promociona con el coloquio queda como alumno **Regular** si tiene por lo menos un parcial aprobado y los porcentajes de presencia requeridos, caso contrario figurara como **ABANDONO** o **LIBRE** según el caso y debe rendir examen final. Este consiste en una primera parte escrita con tema común para todos los alumnos, y sólo aquellos que satisfagan un nivel adecuado, pasan a la segunda parte **ORAL** con tema individual.

PROGRAMA ANALITICO

Introducción

- Historia - Fuerza - Principios - Deslizamiento de una fuerza - Rozamiento

Cap.1 - Fuerzas concurrentes en el plano:

- Composición - Equilibrio - Descomposición - Tres fuerzas - Culmann - Proyecciones - Momento (Varignon)

Cap.2 - Fuerzas paralelas en el plano:

– Fuerzas paralelas en la misma dirección - Dos fuerzas paralelas desiguales en sentido opuesto - Cupla
– Caso general de fuerzas paralelas en el plano.- Centro de fuerzas paralelas - Centro de gravedad - Teorema de Papus y Guldin - Centro de gravedad de figuras o curvas planas compuestas.- Centro de gravedad por integración - Centro de gravedad experimentalmente.- Fuerzas paralelas repartidas de manera continua.

Cap.3 - Caso general de fuerzas en el plano:

- Composición de fuerzas en el plano (polígono de presiones) - Proyecciones y momentos - Ecuaciones de equilibrio - Vínculos estáticamente determinados - Los apoyos - Diagrama del cuerpo libre.

Cap.4 - Los cables:

- Los cables con cargas concentradas - Los cables sometidos a peso propio (Catenaria) - Los cables sometidos a carga uniforme horizontal (Parábola).

Cap.5 - Los enrejados articulados planos:

- Introducción - Indeformabilidad e isostaticidad - Equilibrio analítico y gráfico de los nudos - Cortes de Ritter - Formas críticas.

Cap.6 - Diagramas característicos en el plano:

- Las fuerzas interiores - Elementos de reducción (M,N,T) - Elementos rectos o curvos - Relación entre M y T - Diagrama de corte.- Vigas cantilever - Carga indirecta - Utilización de los diagramas de M y T en los enrejados - La flexión en los arcos con tres articulaciones.

Cap.7 - Fuerzas concurrentes en el espacio:

- Composición y descomposición - Proyecciones - Momentos

Cap.8 - Cuplas y fuerzas paralelas en el espacio:

- Cuplas en planos paralelos - Cuplas en planos no paralelos -Proyección de cuplas - Momento respecto a un punto y respecto a un eje por dicho punto - Caso general de fuerzas paralelas en el espacio - Centro de fuerzas paralelas y centro de gravedad.

Cap.9 - Caso general de fuerzas en el espacio:

- Composición - Proyecciones y momentos - Vínculos estáticos de un cuerpo indeformable en el espacio - Diagramas característicos: flexión, corte, normal, torsión.

Cap.10 - Principio de los desplazamientos virtuales:

- Introducción - Trabajo - Principio para el sistema ideal - Extensiones del principio para reacciones - Determinación gráfica de los desplazamientos virtuales, centro instantáneo de rotación - Gráfico de los desplazamientos - Cortaduras relativas - Diagrama de corrimiento - Equilibrio estable, inestable e indiferente Vínculos y coordenadas generalizadas - Fuerzas generalizadas - Ecuaciones de equilibrio en coordenadas generalizadas - Noción de línea de influencia.

DISTRIBUCIÓN DE LA CARGA HORARIA

ACTIVIDAD		HORAS
TEÓRICA		27
FORMACIÓN PRACTICA		
	FORMACIÓN EXPERIMENTAL	
	RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS	45
	ACTIVIDADES DE PROYECTO Y DISEÑO	
	PPS	
	TOTAL DE LA CARGA HORARIA	**72**

DEDICADA POR EL ALUMNO FUERA DE CLASE

ACTIVIDAD		HORAS
PREPARACIÓN TEÓRICA		27
PREPARACIÓN PRACTICA		
	EXPERIMENTAL DE LABORATORIO	
	EXPERIMENTAL DE CAMPO	
	RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS	45
	PROYECTO Y DISEÑO	
	TOTAL DE LA CARGA HORARIA	**72**

BIBLIOGRAFIA GENERAL

1.Beer y Jonhston: *"Mecánica vectorial para ingenieros"* Ed. Mc Graw-Hill. Tomo I Estática

2.Pirard Gérald y Arias Marcelo: *"Estática"* Ed. interna Dpto. Estructuras 2006

3.Pirard Gérald: *"Principio de los desplazamientos virtuales y Líneas de influencia en los sistemas isostáticos"* Ed. interna Dpto Estructuras 1994

4.Hibbeler R.C.: *"Mecánica para ingenieros"* Estática (CECSA)

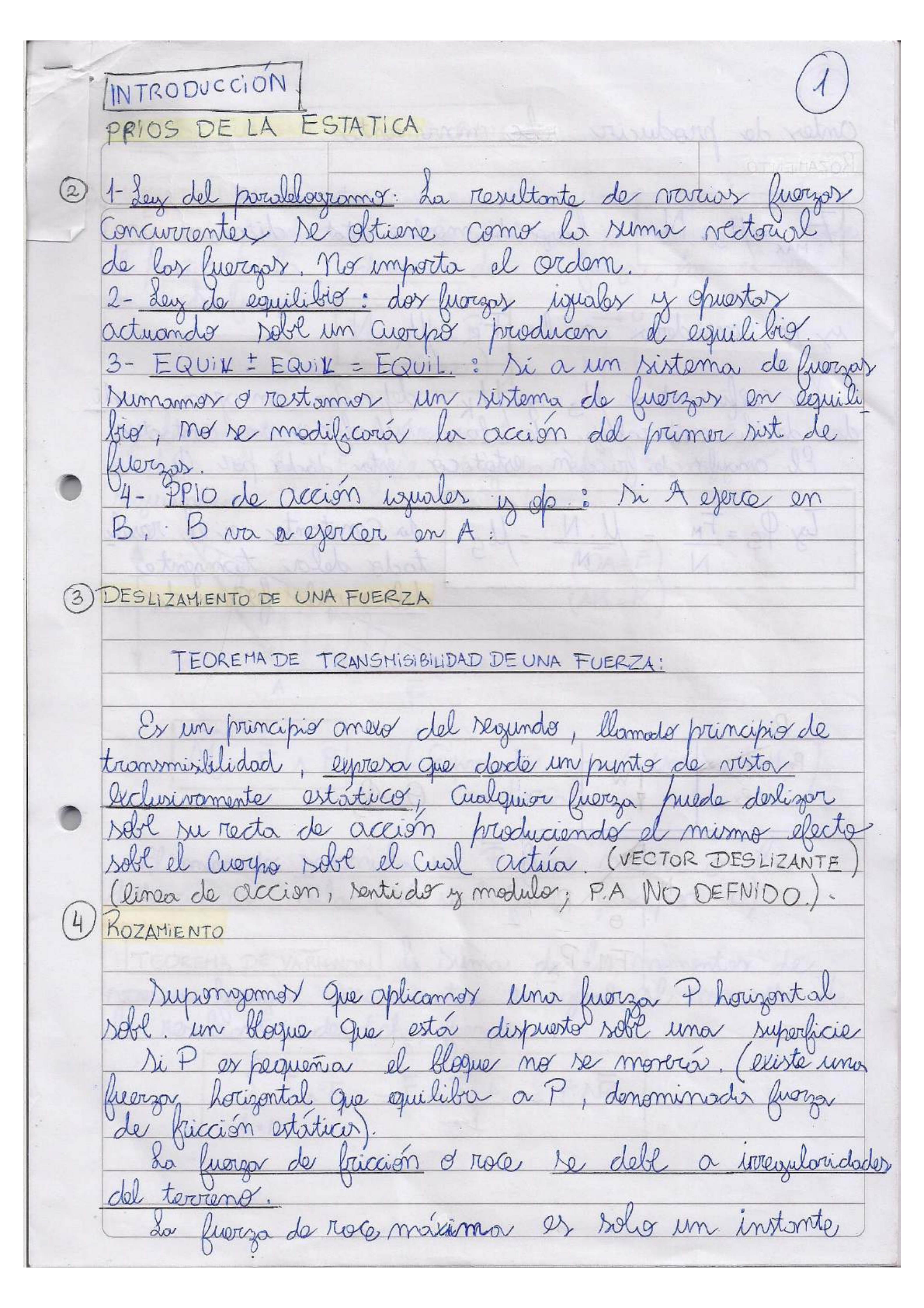
5.Anand Cunniff: *"Mecánica para ingenieros"* Estática (CECSA)

6.Timoshenko y Young: *"Mecánica técnica"* Hachette. Bs As.

CRONOGRAMA DE DESARROLLO DE LAS ACTIVIDADES:

Las actividades se desarrollan durante 16 semanas.

1ra semana Introducción. Fuerzas concurrentes en el plano. Momento. Fuerzas paralelas. Cupla. C. de fuerzas paralelas. C. de Gravedad.
2da semana Pappus y Guldin. Fuerzas repartidas. Fuerzas generales en el plano. Vínculos.
3ra semana Esquema libre. Diagrama de corrimiento y Trabajo virtual.
4ta semana Cables.
5ta semana Enrejados. Ritter.
6ta semana Momento, Normal y corte. Relación entre ellos.
7ma semana Diagramas .
8va semana Diagramas y utilización del trabajo virtual.
9na semana Fuerzas en el espacio. Concurrentes. Cupla.
10ma semana Fuerzas paralelas. C. de fuerzas paralelas. Centro de gravedad.
11va semana Fuerzas generales en el espacio. Diagramas.
12va semana Trabajos virtuales.
13va semana Energía potencial
14va semana Estabilidad del equilibrio
15va semana Repasos.
16va semana Coloquios.



INTRODUCCIÓN

1

PRIOS DE LA ESTATICA

(2) 1- Ley del paralelogramo: La resultante de varias fuerzas concurrentes se obtiene como la suma vectorial de las fuerzas. No importa el orden.

2- Ley de equilibrio: dos fuerzas iguales y opuestas actuando sobre un cuerpo producen el equilibrio.

3- EQUIL ± EQUIL = EQUIL: Si a un sistema de fuerzas sumamos o restamos un sistema de fuerzas en equilibrio, no se modificará la acción del primer sist de fuerzas.

4- PPIO de acción iguales y op: Si A ejerce en B, B va a ejercer en A.

(3) DESLIZAMIENTO DE UNA FUERZA

TEOREMA DE TRANSMISIBILIDAD DE UNA FUERZA:

Es un principio anexo del segundo, llamado principio de transmisibilidad, expresa que desde un punto de vista exclusivamente estático, cualquier fuerza puede deslizar sobre su recta de acción produciendo el mismo efecto sobre el cuerpo sobre el cual actúa. (VECTOR DESLIZANTE) (linea de accion, sentido y modulo; P.A NO DEFNIDO.).

(4) ROZAMIENTO

Supongamos que aplicamos una fuerza P horizontal sobre un bloque que está dispuesto sobre una superficie.

Si P es pequeña el bloque no se moverá. (existe una fuerza horizontal que equilibra a P, denominada fuerza de fricción estática).

La fuerza de fricción o roce se debe a irregularidades del terreno.

La fuerza de roce máxima es solo un instante

antes de producir el movimiento

$$F_{r_{MAX}} = \mu_S . N$$ luego de moverse esta disminuye.

y se considera a la $F_R = \mu_K . N$

Los coeficientes μ_S y μ_K dependen en gran medida de la naturaleza de las superficies en contacto.

El angulo de fricción estático esta dado por ϕ_S

$$Tg\,\phi_S = \frac{F_M}{N} = \frac{\mu . N}{N} = \mu_S$$

La constante es el resultado dela tangente del angulo formado.

P

P_y

P_x

W

N

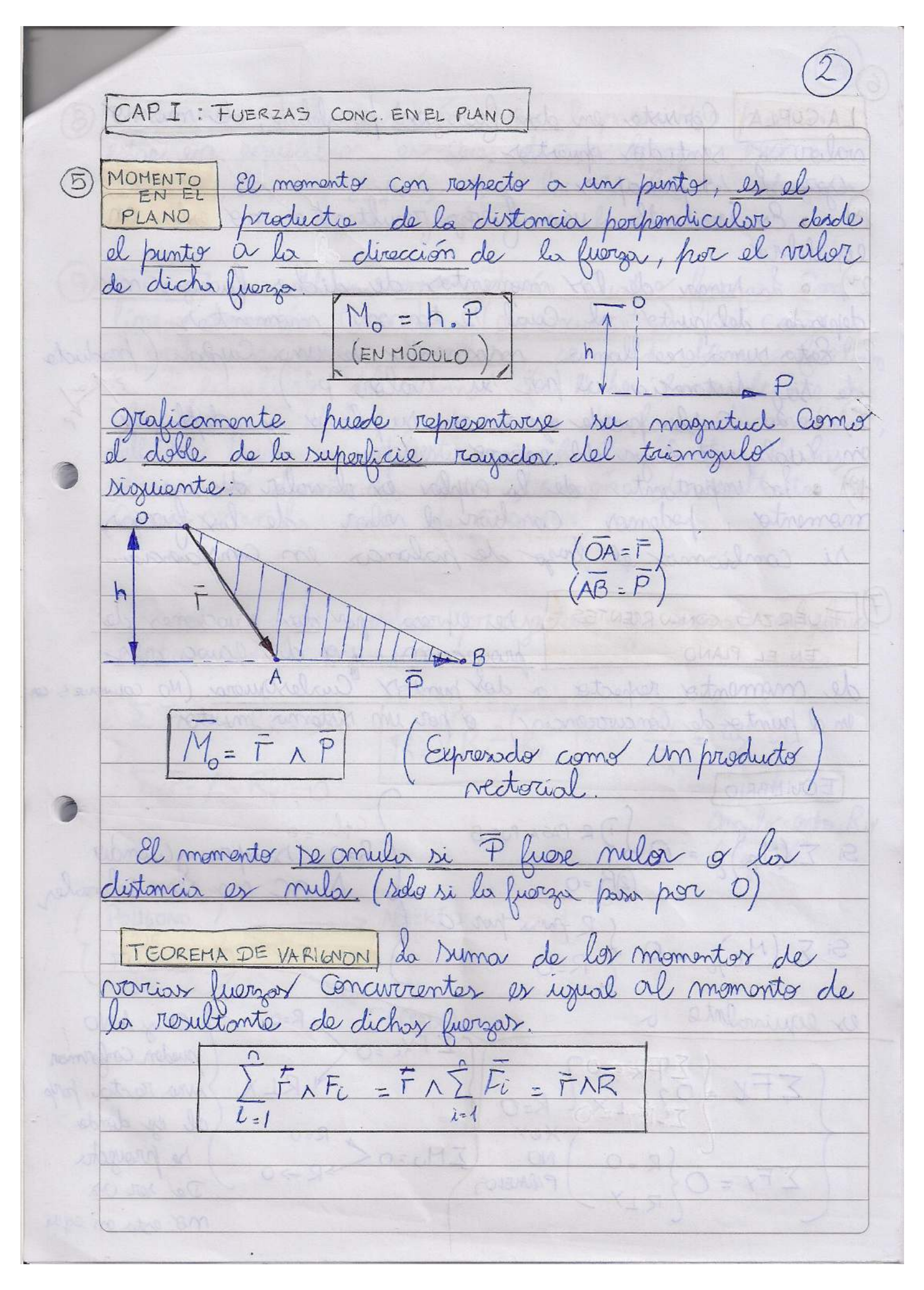
R

θ

$FM = P_x$

$\theta = \phi_S$

CAP I : FUERZAS CONC. EN EL PLANO



5 **MOMENTO EN EL PLANO** El momento con respecto a un punto, es el producto de la distancia perpendicular desde el punto a la dirección de la fuerza, por el valor de dicha fuerza.

$$M_o = h \cdot P$$
(EN MÓDULO)

Graficamente puede representarse su magnitud como el doble de la superficie rayada del triangulo siguiente:

$(\overline{OA} = \bar{r})$
$(\overline{AB} = \bar{P})$

$$\bar{M}_o = \bar{r} \wedge \bar{P}$$

(Expresado como un producto vectorial.)

El momento se anula si $\bar{P}$ fuese nulo o la distancia es nula. (solo si la fuerza pasa por O)

TEOREMA DE VARIGNON La suma de los momentos de varias fuerzas concurrentes es igual al momento de la resultante de dichas fuerzas.

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{r} \wedge F_i = \bar{r} \wedge \sum_{i=1}^{n} \bar{F_i} = \bar{r} \wedge \bar{R}$$

(6)

LA CUPLA Consiste en dos fuerzas paralelas, de mismo valor y sentidos opuestos.

Goza de 4 principios:

1ª) • Es irreducible a una fuerza resultante, no esta en equilibrio.

2ª) • La suma de los momentos de dichas fuerzas no depende del punto al cual se toman momentos.

Esta suma se llama momento de una Cupla (producto de su distancia "a" por su valor "p").

P a P

3ª) • La Cupla puede girar en su plano y desplazarse en cualquier lugar del mismo.

4ª) • Lo importante de la cupla es el valor de su momento, podemos cambiar el valor de las fuerzas si cambiamos el brazo de palanca en consecuencia.

(7)

FUERZAS CONCURRENTES EN EL PLANO se expresa por dos ecuaciones de proyeccion y o dos ecuaciones de momento respecto a dos puntos cualesquiera. (NO COLINEALES con en el punto de concurrencia). o por un sistema mixto

EQUILIBRIO

Si $\Sigma (M_B)_i = 0$ { 1) R PASA POR B ; 2) R = 0 (CUPLA = 0) }

Si $\Sigma (M_C)_i = 0$ { R pasa por C ; R = 0 (cupla = 0) }

} cupla = 0, R = 0 siempre y cuando A BC no sean colineales

es equivalente a

$\Sigma F_X = 0$ { R = 0 ; R ⊥ X }

$\Sigma F_Y = 0$ { R = 0 ; R ⊥ Y }

} R = 0 X e Y NO PARALELOS

$\Sigma F_{X_i} = 0$ < R = 0 ; R ⊥ X

$\Sigma M_O = 0$ < R = 0 ; R → O

} O y A NO pueden conformar una recta perp. al eje donde se proyecta. De ser asi no esta en equi

(8) TRES FUERZAS: La condición esencial para que puedan estar en equilibrio, es que dichas fuerzas sean concurrentes, y después que la resultante de dos de ellas sea igual y opuesta a la tercera.

(9) CULMAN: Si sobre un cuerpo actúan cuatro fuerzas con líneas de acción conocidas (no concurrentes), así como el valor de una de ellas, se puede obtener fácilmente el equilibrio del sistema. De hecho la resultante de la fuerza dada y de una de las desconocidas, debe ser igual y opuesta a la resultante de las otras dos desconocidas. Esta dirección de resultante se conoce como la recta de CULMANN.

Para trabajar debo proyectar y sumar algebraicamente cada componente.

$$\begin{cases} \sum F_i X = R_x = 0 \\ \sum F_i Y = R_y = 0 \end{cases}$$

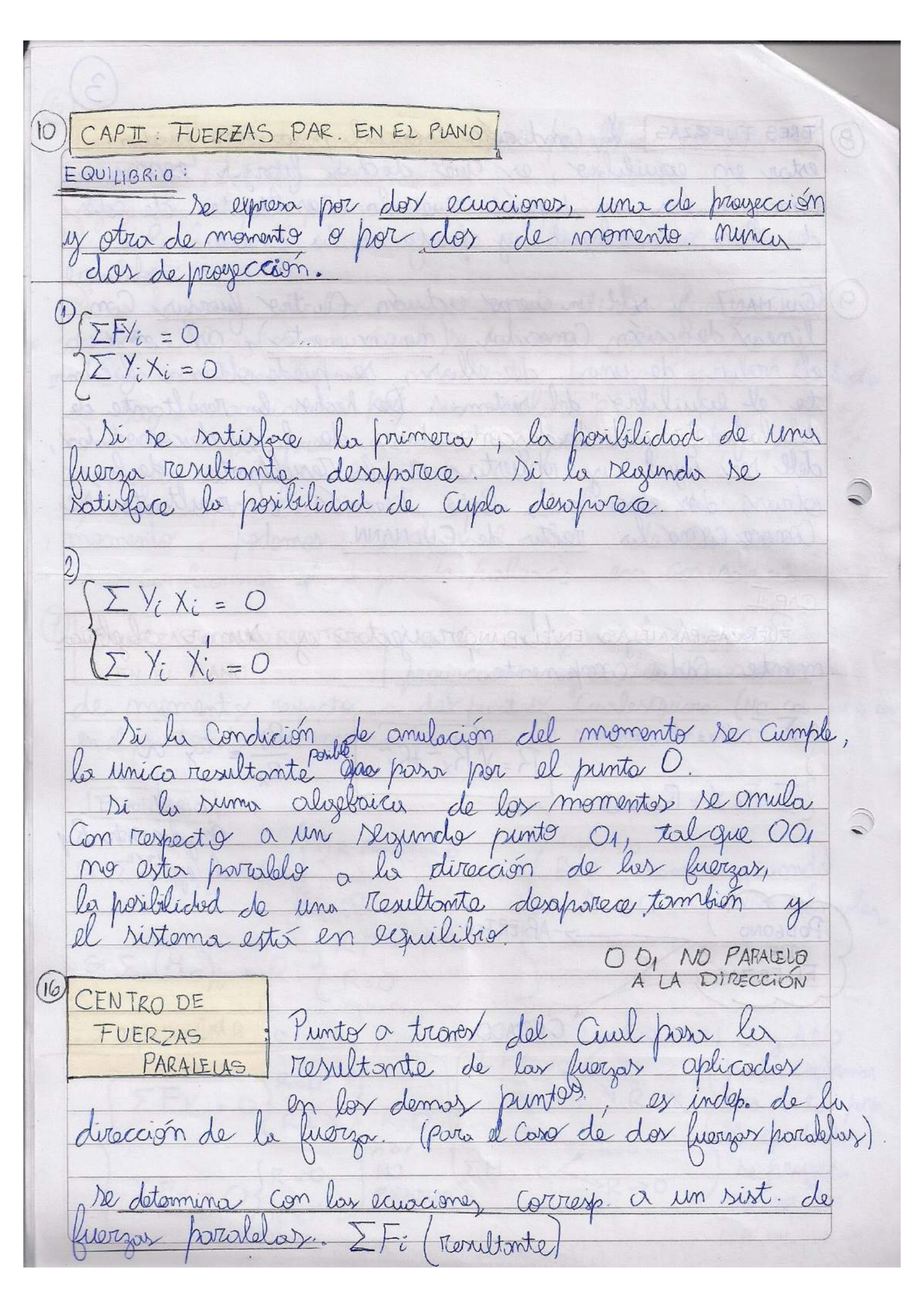
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

$$\frac{R_y}{R_x} = \operatorname{tg} \alpha$$

↓ Angulo entre Ry el eje "X"

POLIGONO DE FUERZAS → ABIERTO

→ CERRADO.



(10) CAP II: FUERZAS PAR. EN EL PLANO

EQUILIBRIO:

Se expresa por dos ecuaciones, una de proyección y otra de momento o por dos de momento, nunca dos de proyección.

1)
$$\begin{cases} \sum F Y_i = 0 \\ \sum Y_i X_i = 0 \end{cases}$$

Si se satisface la primera, la posibilidad de una fuerza resultante desaparece. Si la segunda se satisface la posibilidad de cupla desaparece.

2)
$$\begin{cases} \sum Y_i X_i = 0 \\ \sum Y_i X_i' = 0 \end{cases}$$

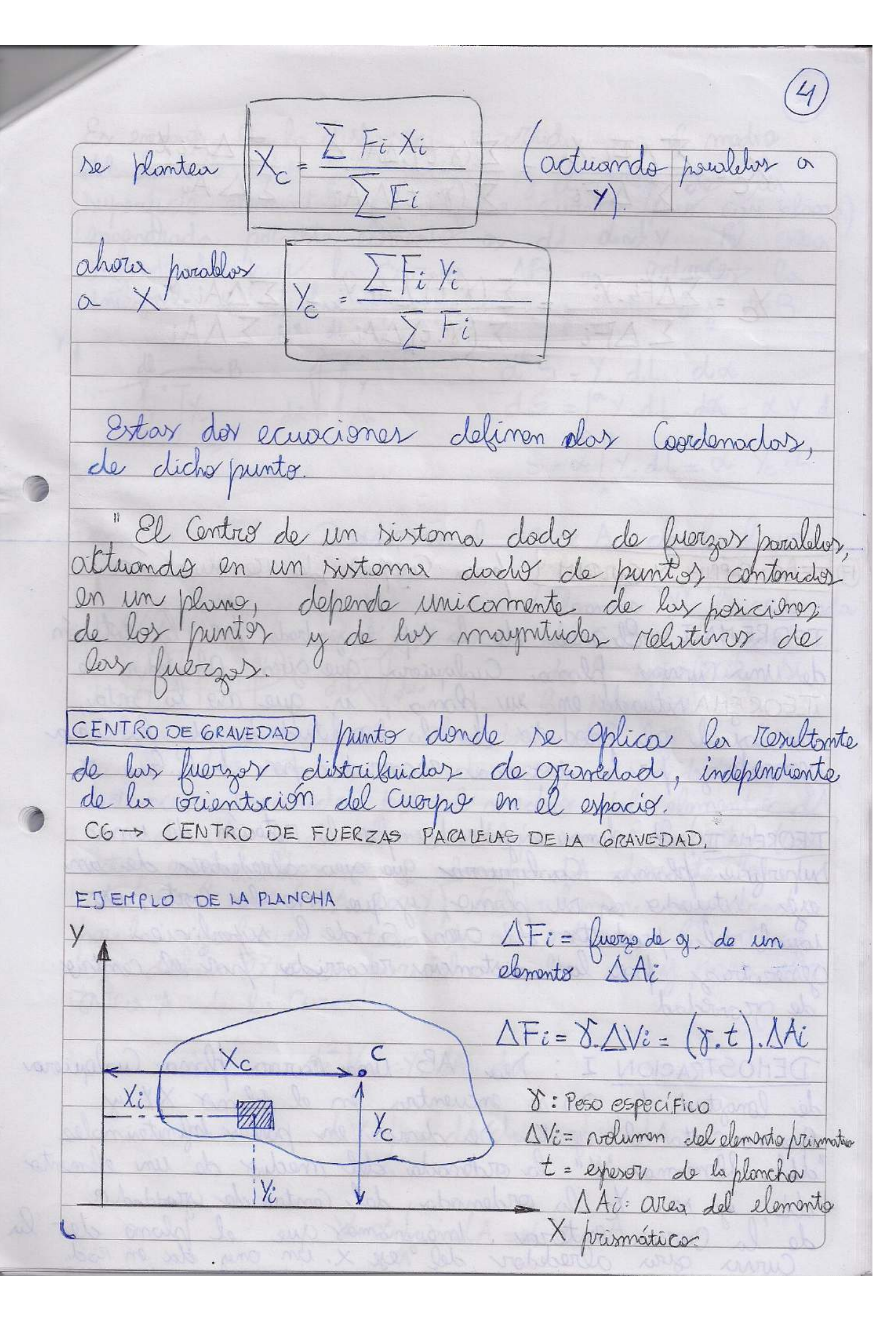
Si la condición de anulación del momento se cumple, la unica resultante posible pasa por el punto O.

Si la suma algebraica de los momentos se anula con respecto a un segundo punto O_1, tal que OO_1 no esta paralelo a la dirección de las fuerzas, la posibilidad de una resultante desaparece también y el sistema está en equilibrio.

$O\,O_1$ NO PARALELO A LA DIRECCIÓN

(16) CENTRO DE FUERZAS PARALELAS: Punto a traves del cual pasa la resultante de las fuerzas aplicadas en los demas puntos, es indep. de la dirección de la fuerza. (para el caso de dos fuerzas paralelas)

Se determina con las ecuaciones corresp. a un sist. de fuerzas paralelas. $\sum F_i$ (resultante)



se plantea $X_C = \dfrac{\sum F_i X_i}{\sum F_i}$ (actuando paralelas a Y).

ahora paralelas a X $Y_C = \dfrac{\sum F_i Y_i}{\sum F_i}$

Estas dos ecuaciones definen las coordenadas, de dicho punto.

"El Centro de un sistema dado de fuerzas paralelas, actuando en un sistema dado de puntos contenidos en un plano, depende únicamente de las posiciones de los puntos y de las magnitudes relativas de las fuerzas.

CENTRO DE GRAVEDAD: punto donde se aplica la resultante de las fuerzas distribuidas de gravedad, independiente de la orientación del cuerpo en el espacio.

CG → CENTRO DE FUERZAS PARALELAS DE LA GRAVEDAD.

EJEMPLO DE LA PLANCHA

ΔF_i = fuerza de g. de un elemento ΔA_i

$\Delta F_i = \gamma . \Delta V_i = (\gamma . t) . \Delta A_i$

γ : Peso específico

ΔV_i = volumen del elemento prismático

t = espesor de la plancha

ΔA_i: área del elemento prismático

$$X_C = \frac{\sum \Delta F_i . x_i}{\sum \Delta F_i} = \frac{\sum (\gamma . t) . \Delta A_i . x_i}{\sum (\gamma . t) \Delta . A_i} = \frac{\sum \Delta A_i x_i}{\sum \Delta A_i}$$

$$Y_C = \frac{\sum \Delta F_i . Y_i}{\sum \Delta F_i} = \frac{\sum (\gamma . t) . \Delta A_i . Y_i}{\sum (\gamma . t) \Delta A_i} = \frac{\sum \Delta A_i . Y_i}{\sum \Delta A_i}$$

(17) TEOR. PAPPUS Y GULDIM para cuerpos de revolución

TEOREMA I: El area de la sup. engendrada por la rotación de una curva plana cualquiera que gira alrededor de un eje situado en su plano, y que no lo corta, es igual al producto de la longitud L de la curva generatriz por la distancia recorrida por el C.G.

TEOREMA II: El volumen engendrado por la rotación de una superficie plana cualquiera que gira alrededor de un eje situado en su plano, y que no la corta, es igual al producto del area S de la superficie generatriz por la distancia recorrida por el centro de gravedad.

DEMOSTRACION I: Sea AB una curva plana cualquiera de longitud L, que se encuentra en el plano XY y que no corta al eje X. Se divide en partes infinitesimales "dL". Llamamos "y" la ordenada del medio de un elemento dL, y sea Y_C la ordenada del centro de gravedad C de la curva entera. Imaginamos que el plano de la curva gira alrededor del eje X. un ang dα en rad.

Es evidente que la distancia recorrida por el medio del elemento dL es $(d\alpha . Y)$, y el area de la superficie elemental rectangular curva (pero casi plana) engendrada por este elemento es $dL . d\alpha . Y$. El area engendrada por la curva AB es entonces la integral de dicha exp. para α y para long. A-B

$$d^2S = Y . dL . d\alpha$$

$$dS = \int_0^{\alpha} Y . dL . d\alpha = \alpha . Y . dL$$

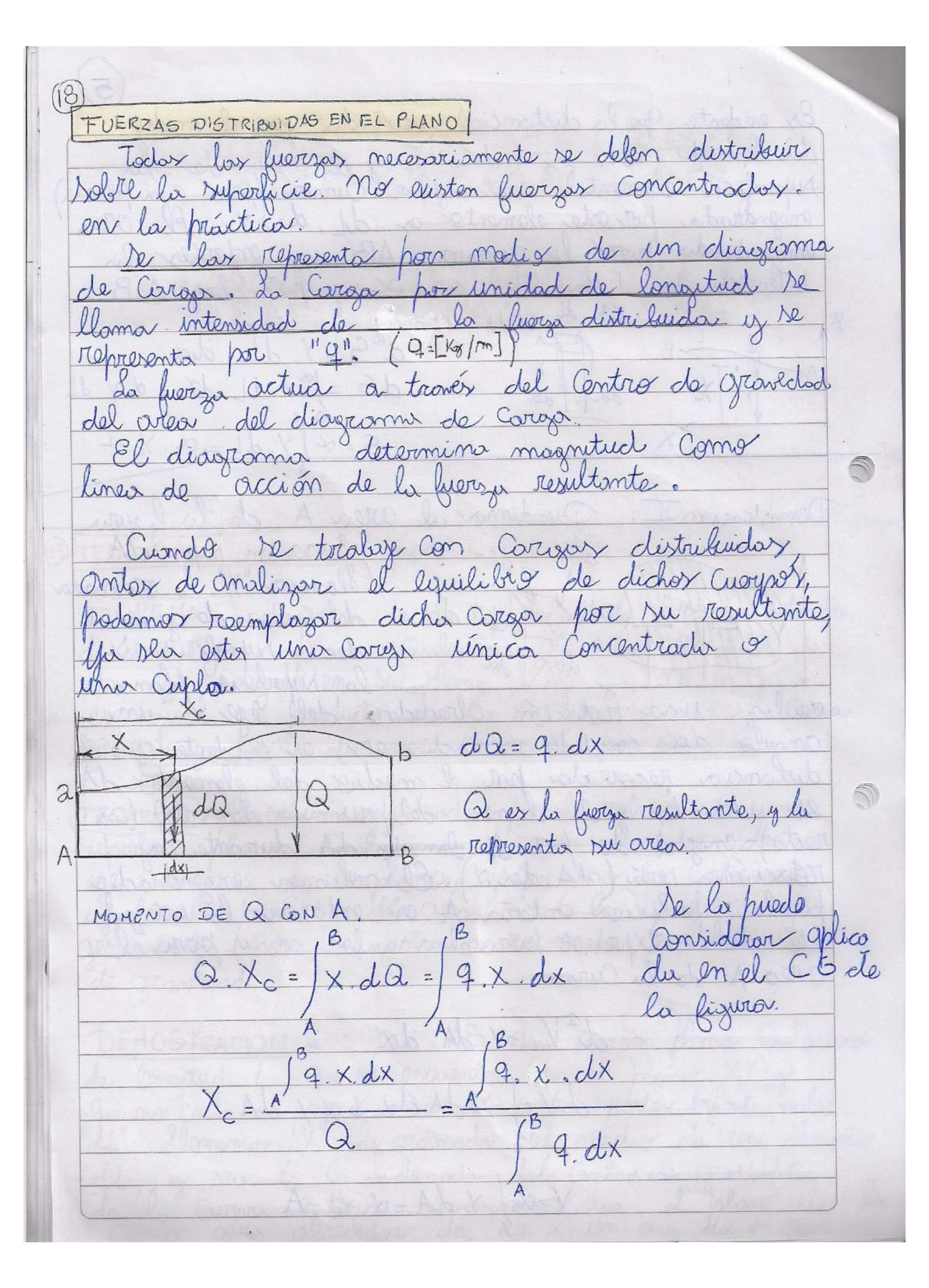
$$S = \alpha \int_A^B Y . dL = \alpha . Y_c . L$$

Demostracion II: Dividimos al area A. de la figura plana en sup. dA. Llamamos "Y" la ordenada del centro de gravedad de la superficie. Si la superficie plana realiza una rotación alrededor del eje X un angulo $d\alpha$ medido en radianes, es evidente que la distancia recorrida por el medio del elemento dA es $d\alpha . Y$, y el volumen del prisma elemental (casi recto) engendrado por el elemento dA durante la rotación será $(dA . d\alpha . Y)$. El volumen engendrado por la superficie entera A es entonces la integral de dicha expresión para el angulo α y para el area A de la curva.

$$d^2V = Y . dA . d\alpha$$

$$dV = \int_0^{\alpha} Y . dA . d\alpha = \alpha . Y . dA$$

$$V = \alpha \int_A Y \, dA = \alpha . Y_c . A$$



(18)

FUERZAS DISTRIBUIDAS EN EL PLANO

Todas las fuerzas necesariamente se deben distribuir sobre la superficie. No existen fuerzas concentradas en la práctica.

Se las representa por medio de un diagrama de Carga. La Carga por unidad de longitud se llama intensidad de la fuerza distribuida y se representa por "q". ($q = [Kg/m]$)

La fuerza actua a través del Centro de gravedad del area del diagrama de carga.

El diagrama determina magnitud como linea de acción de la fuerza resultante.

Cuando se trabaje con Cargas distribuidas, antes de analizar el equilibrio de dichos cuerpos, podemos reemplazar dicha Carga por su resultante, ya sea esta una Carga única Concentrada o una Cupla.

$$dQ = q.dx$$

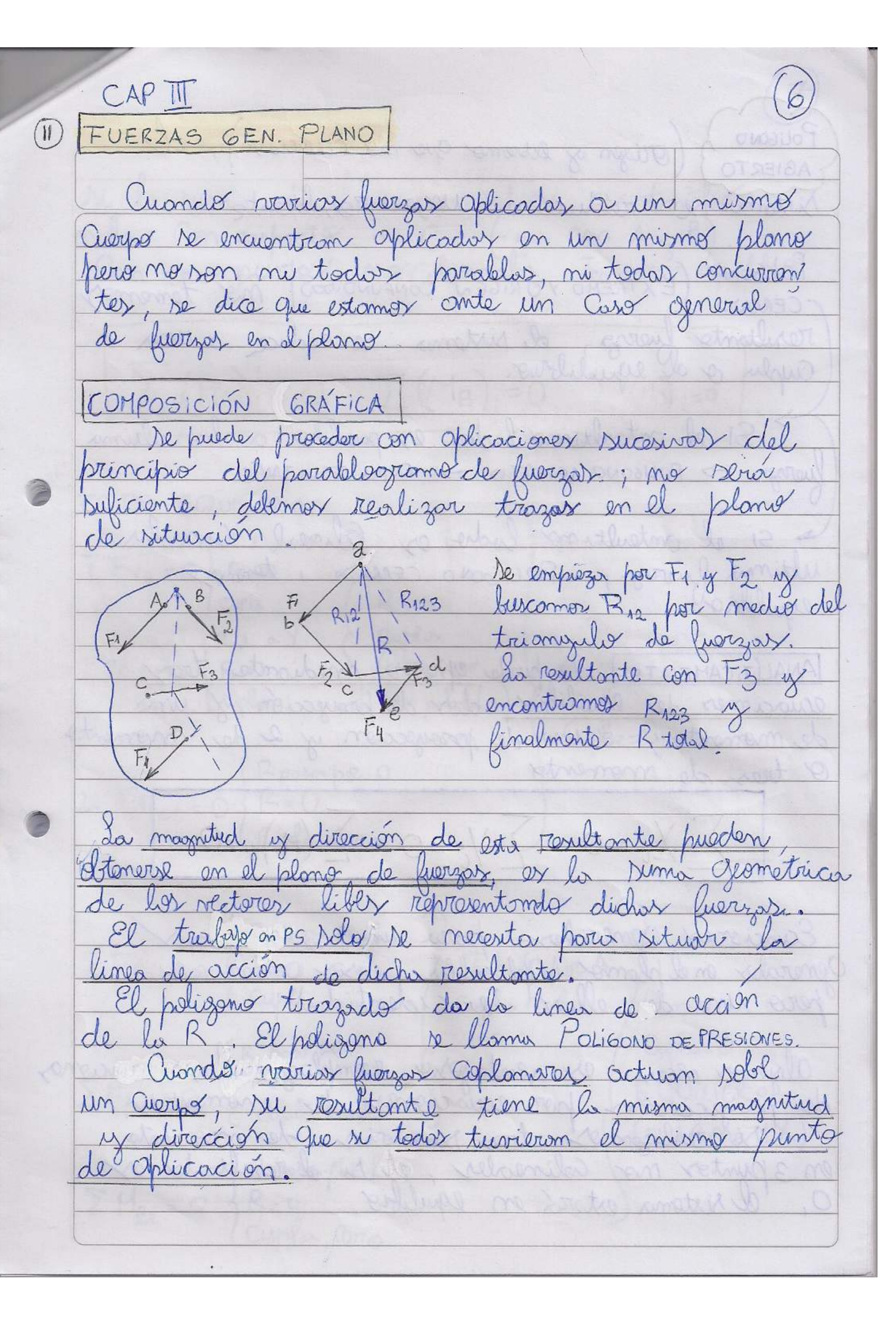
Q es la fuerza resultante, y la representa su area.

MOMENTO DE Q CON A.

$$Q.X_c = \int_A^B x.dQ = \int_A^B q.x.dx$$

Se la puede considerar aplicada en el CG de la figura.

$$X_c = \frac{\int_A^B q.x.dx}{Q} = \frac{\int_A^B q.x.dx}{\int_A^B q.dx}$$



(11) FUERZAS GEN. PLANO

Cuando varias fuerzas aplicadas a un mismo cuerpo se encuentran aplicadas en un mismo plano pero no son ni todas paralelas, ni todas concurrentes, se dice que estamos ante un caso general de fuerzas en el plano.

COMPOSICIÓN GRÁFICA

Se puede proceder con aplicaciones sucesivas del principio del paralelogramo de fuerzas; no será suficiente, debemos realizar trazos en el plano de situación.

Se empieza por F_1 y F_2 y buscamos R_{12} por medio del triángulo de fuerzas. La resultante con F_3 y encontramos R_{123} y finalmente R total.

La magnitud y dirección de esta resultante pueden obtenerse en el plano de fuerzas, es la suma geométrica de los vectores libres representando dichas fuerzas.

El trabajo en PS solo se necesita para situar la línea de acción de dicha resultante.

El polígono trazado da la línea de acción de la R. El polígono se llama POLÍGONO DE PRESIONES.

Cuando varias fuerzas coplanares actúan sobre un cuerpo, su resultante tiene la misma magnitud y dirección que si todos tuvieran el mismo punto de aplicación.

POLIGONO ABIERTO (origen y extremo que no coinciden), el sistema se reduce a una resultante

POLIGON CERRADO (EXTREMO Y ORIGEN CONFUNDIDOS) no tenemos resultante fuerza, el sistema se reduce a una cupla o al equilibrio.

→ SI el anteultimo lado es paralelo a la ultima fuerza. → POLIGONO ABIERTO → CUPLA RESULTANTE

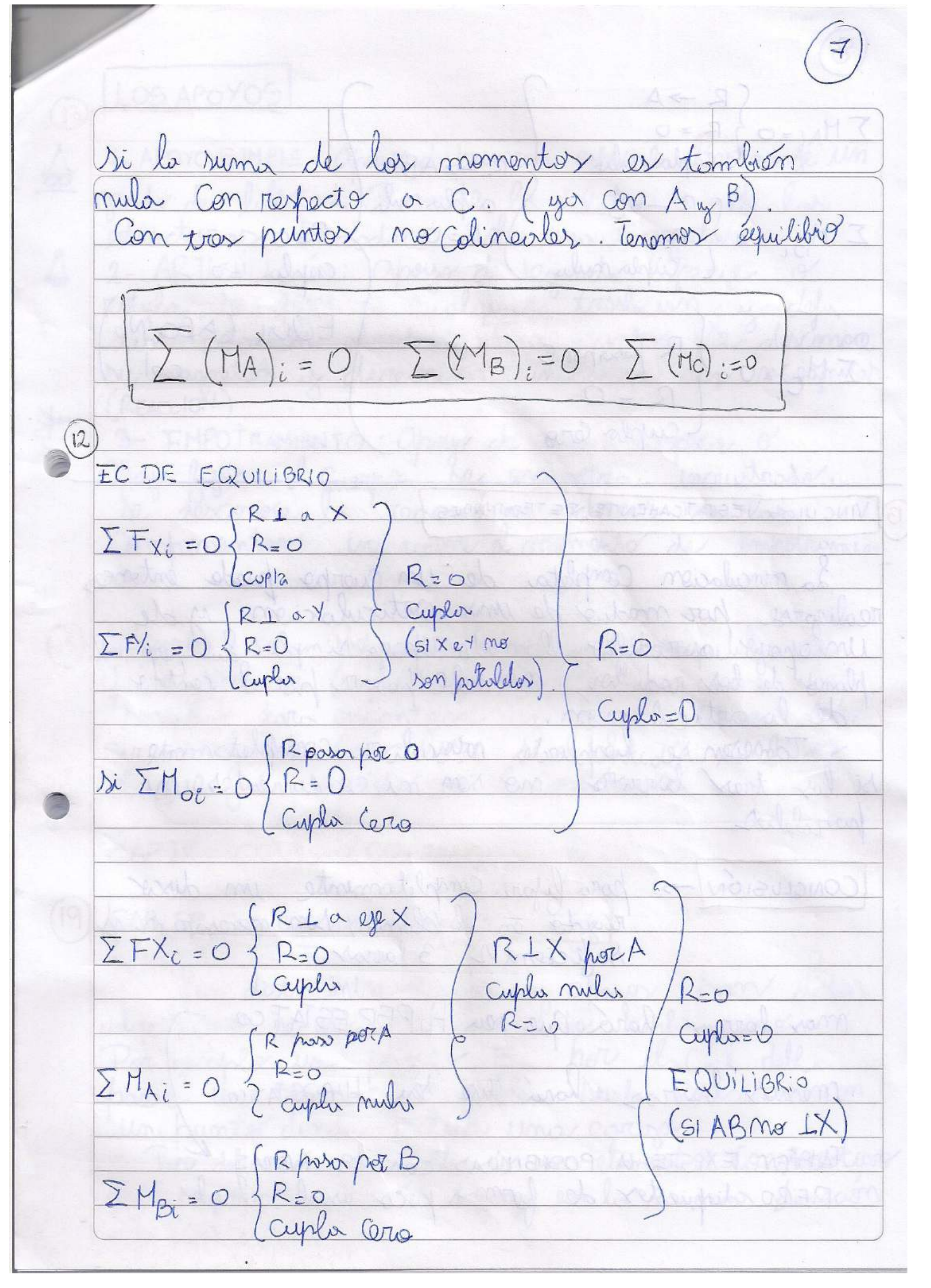
→ SI el anteultimo lado es Colineal con la ultima fuerza, POLIGONO CERRADO, tenemos equilibrio

ANALÍTICAMENTE Se puede expresar mediante tres ecuaciones de equilibrio. dos de proyección y una de momento; o una de proyeccion y 2 de momento o tres de momento

$$\sum X_i = 0 \quad \sum Y_i = 0 \quad \sum (M_o)_i = 0$$

Ecuaciones generales para un caso de fuerzas generales en el plano. Aplicables a casos anteriores pero una de ellas será identidad

Algunas veces es ventajoso reemplazar las ecuaciones de proyecciones por ecuaciones de momentos. Si realizamos tres sumatorias de momento en 3 puntos no colineales, si el resultado es 0, el sistema estará en equilibrio.



si la suma de los momentos es también nula con respecto a C. (ya con A y B).
Con tres puntos no colineales. Tenemos equilibrio

$$\sum (M_A)_i = 0 \quad \sum (M_B)_i = 0 \quad \sum (M_C)_i = 0$$

(12)

EC DE EQUILIBRIO

$\sum F_{X_i} = 0$ { R ⊥ a X; R = 0; cupla } → R = 0; Cupla (SI X e Y no son paralelos)

$\sum F_{Y_i} = 0$ { R ⊥ a Y; R = 0; Cupla }

→ R = 0; Cupla = 0

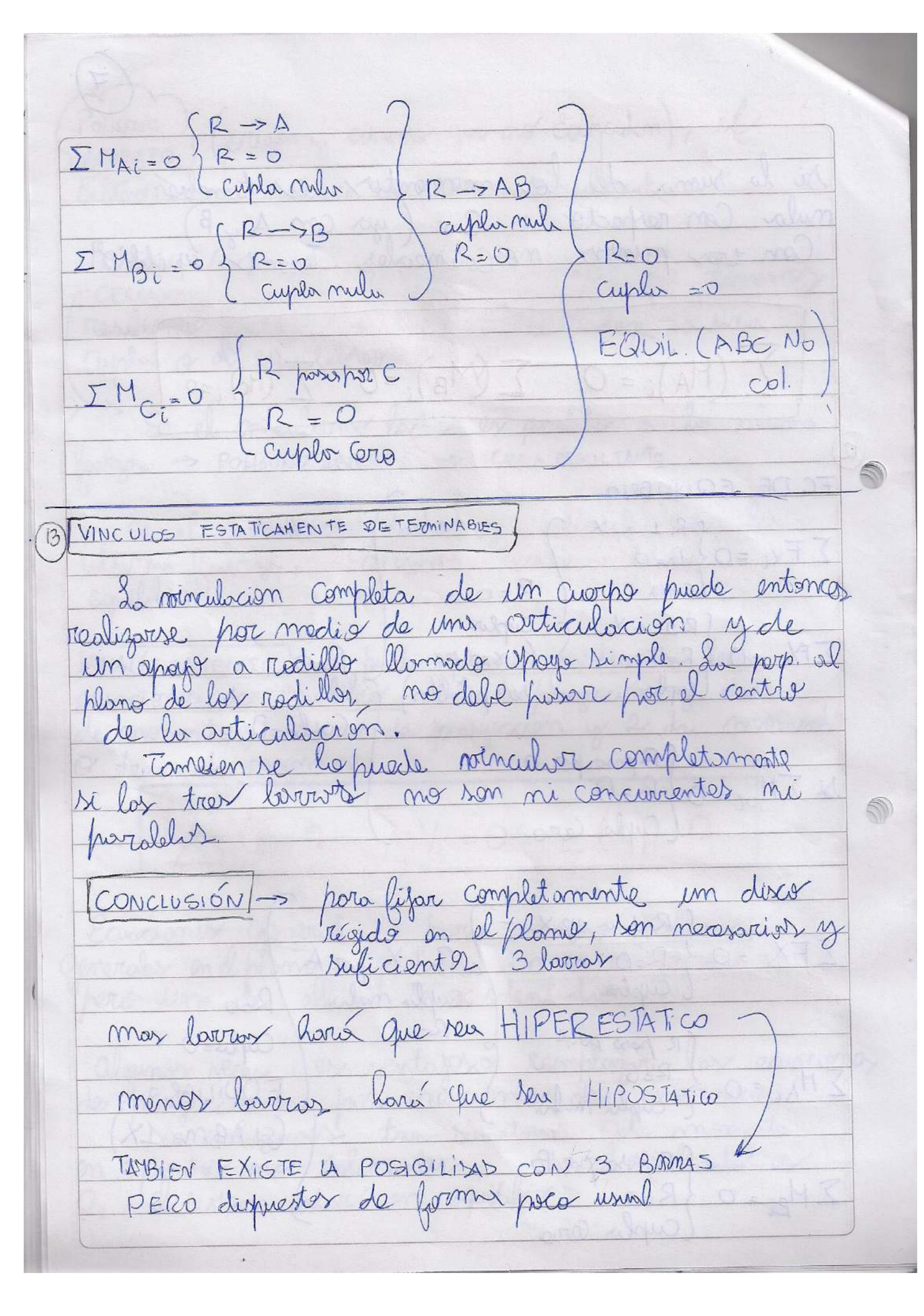
Si $\sum M_{O_i} = 0$ { R pasa por O; R = 0; Cupla cero }

$\sum F_{X_i} = 0$ { R ⊥ a eje X; R = 0; Cupla } → R ⊥ X por A; Cupla nula; R = 0

$\sum M_{A_i} = 0$ { R pasa por A; R = 0; cupla nula }

$\sum M_{B_i} = 0$ { R pasa por B; R = 0; Cupla cero }

→ R = 0; Cupla = 0; EQUILIBRIO (SI AB no ⊥ X)



$\Sigma M_{Ai} = 0 \begin{cases} R \rightarrow A \\ R = 0 \\ \text{cupla nula} \end{cases}$ ⎫ $R \rightarrow AB$, cupla nula, $R = 0$ ⎫ $R = 0$, cupla $= 0$

$\Sigma M_{Bi} = 0 \begin{cases} R \rightarrow B \\ R = 0 \\ \text{cupla nula} \end{cases}$

EQUIL. (ABC No col.)

$\Sigma M_{Ci} = 0 \begin{cases} R \text{ pasa por } C \\ R = 0 \\ \text{cupla cero} \end{cases}$

(13) **VINCULOS ESTATICAMENTE DETERMINABLES**

La vinculacion completa de un cuerpo puede entonces realizarse por medio de una articulación y de un apoyo a rodillo llamado apoyo simple. La perp. al plano de los rodillos, no debe pasar por el centro de la articulación.

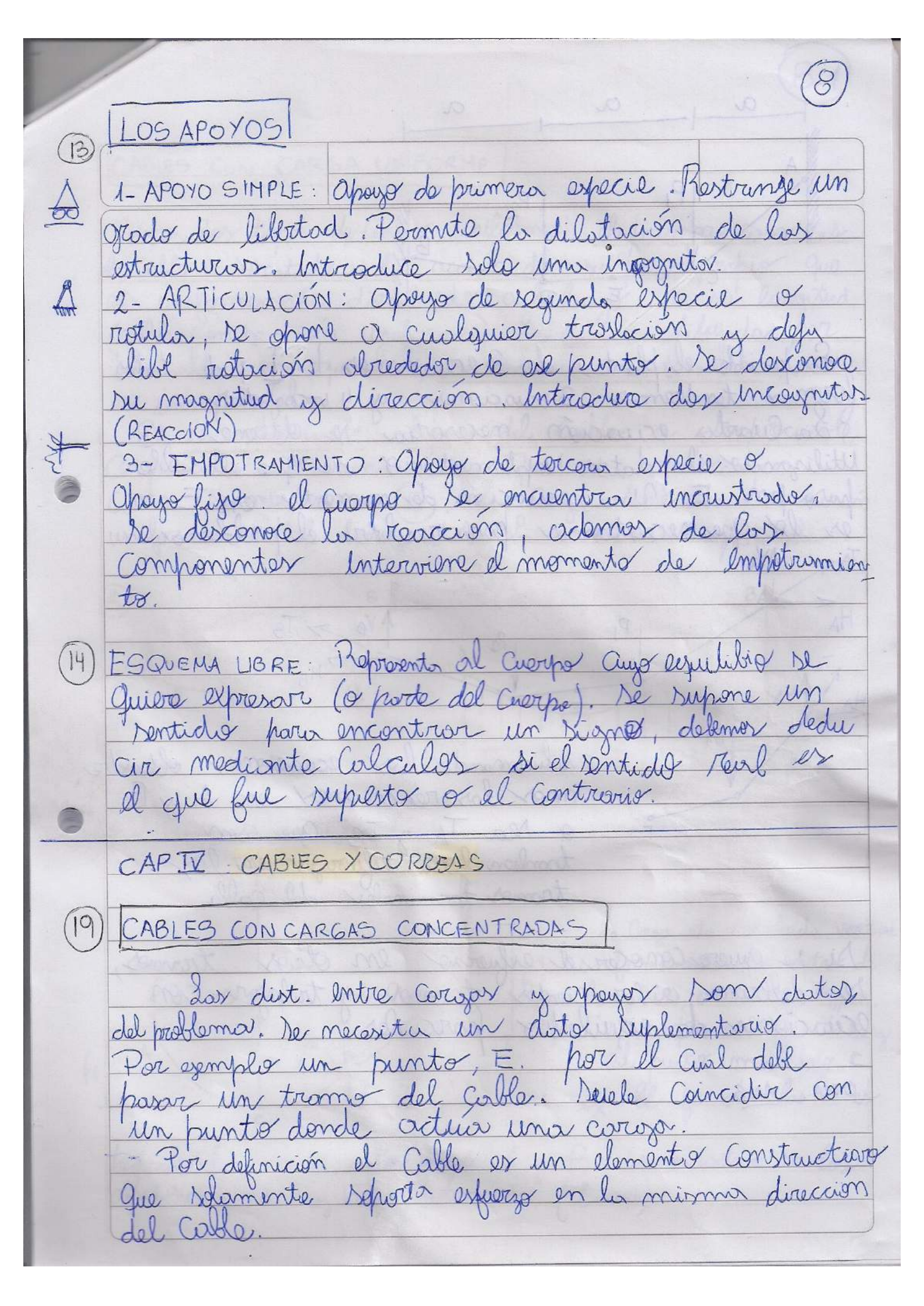
Tambien se lo puede vincular completamente si los tres barras no son ni concurrentes ni paralelas.

CONCLUSIÓN → para fijar completamente un disco rígido en el plano, son necesarios y suficientes 3 barras

mas barras hará que sea HIPERESTATICO

menos barras hará que sea HIPOSTATICO

TAMBIEN EXISTE LA POSIBILIDAD CON 3 BARRAS PERO dispuestas de forma poco usual



(13) LOS APOYOS

1- APOYO SIMPLE: Apoyo de primera especie. Restringe un grado de libertad. Permite la dilatación de las estructuras. Introduce solo una incognita.

2- ARTICULACIÓN: apoyo de segunda especie o rotula, se opone a cualquier traslación y deja libre rotación alrededor de ese punto. Se desconoce su magnitud y dirección. Introduce dos incognitas (REACCION)

3- EMPOTRAMIENTO: Apoyo de tercera especie o Apoyo fijo. el cuerpo se encuentra incrustado, se desconoce la reacción, ademas de las componentes interviene el momento de empotramiento.

(14) ESQUEMA LIBRE: Representa al cuerpo cuyo equilibrio se quiere expresar (o parte del cuerpo). Se supone un sentido para encontrar un signo, debemos deducir mediante calculos si el sentido real es el que fue supuesto o el contrario.

CAP IV: CABLES Y CORREAS

(19) CABLES CON CARGAS CONCENTRADAS

Las dist. entre cargas y apoyos son datos del problema. Se necesita un dato suplementario. Por ejemplo un punto, E. por el cual debe pasar un tramo del cable. Suele coincidir con un punto donde actúa una carga.

- Por definición el cable es un elemento constructivo que solamente soporta esfuerzo en la misma dirección del cable.

(8)

a a a

Es posible el planteo de 3 ecuaciones L I ; de todos formas tendremos 3 ecuaciones y 4 incognitas.
La Cuarta ecuación necesaria se obtiene utilizando el dato suplementario de que el cable pasa por E. Una ecuación de momento en E es lo que necesitamos para resolver el problema.

Solucionando las ecuaciones obtendremos las reacciones en A y B o sea T_A y T_B que son tambien los esfuerzos en los tramos terminales del cable.

Si se quiere conocer el esfuerzo en otros tramos, se deberan aislar ciertos tramos y trabajar con ecuaciones de equilibrio parciales.

OTRA. ANG

CABLES CON CARGA UNIFORME

Existen dos tipos de Cargas uniformes, el primer caso es el Cable sometido a la acción de su peso propio que esta uniformemente distribuido a lo largo de su longitud (Cable con sección uniforme). La Curva dibujada por el Cable en equilibrio, es llamada Catenaria, no es una parabola.

El segundo Caso, el peso del Cable es despreciable Comparado con una Carga que está aplicada como se muestra en (B). La Carga tiene una distribución uniforme sobre la horizontal. La Curva es una parabola.

(A) A B q

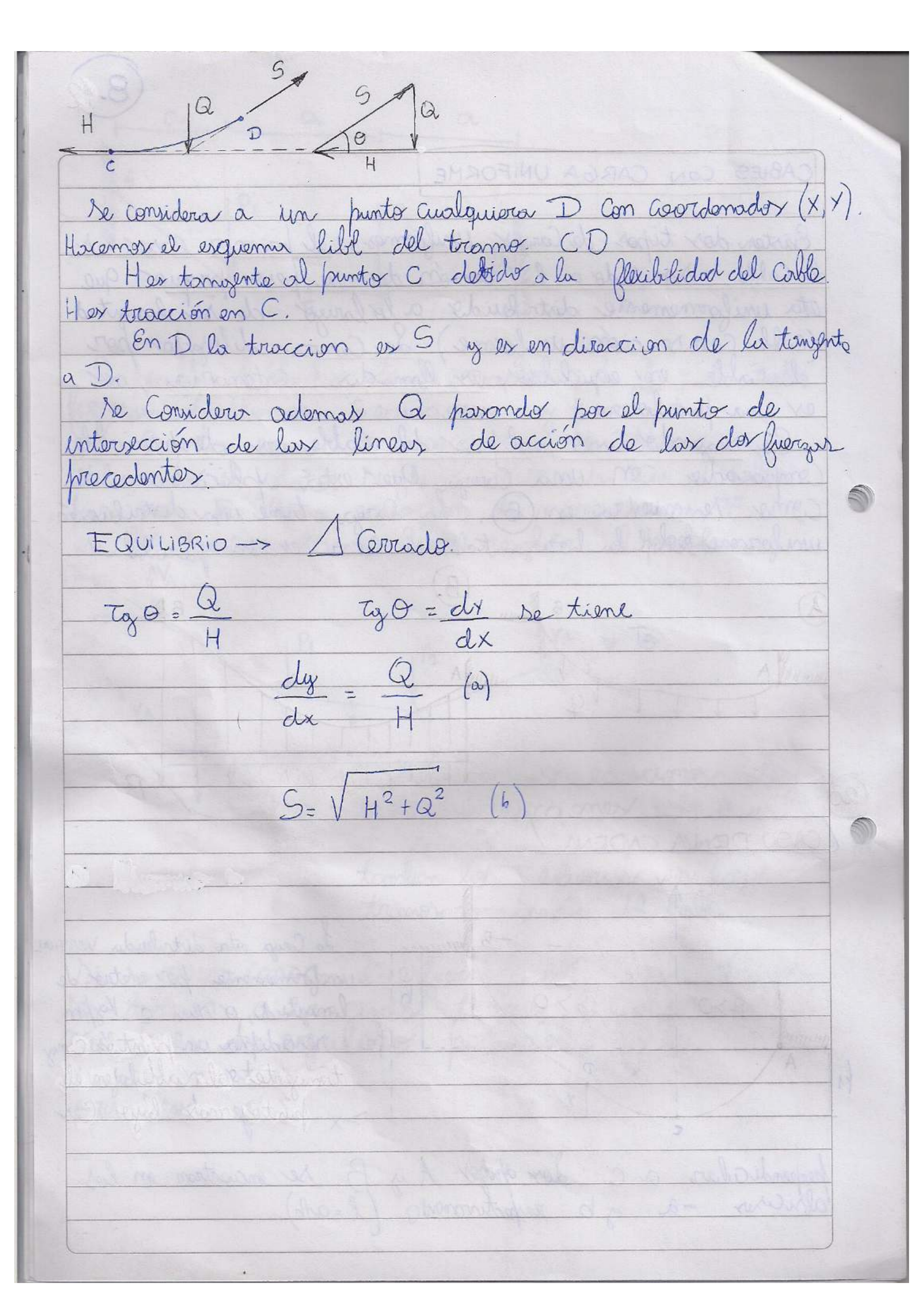
(B) A B P

(20)

CASO DE LA CADENA

y, B, l, a>0, b>0, h, A, f_1, f_2, x, D, y, C, x

La Carga esta distribuida VERTICAL uniformemente por metro de longitud, o sea q Kg/m. se adopta un eje X tang. al punto mas bajo **C**. El eje de las Y es perpendicular a C. Los apoyos A y B se encuentran en las absicisas $-a$ y b respectivamente ($l = a+b$).



Se considera a un punto cualquiera D con coordenadas (X, Y).
Hacemos el esquema libre del tramo CD

H es tangente al punto C debido a la flexibilidad del cable
H es tracción en C.

En D la traccion es S y es en direccion de la tangente a D.

Se considera ademas Q pasando por el punto de intersección de las lineas de acción de las dos fuerzas precedentes.

EQUILIBRIO → △ Cerrado.

$$\tan\theta = \frac{Q}{H} \qquad \tan\theta = \frac{dy}{dx} \text{ se tiene}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q}{H} \quad (a)$$

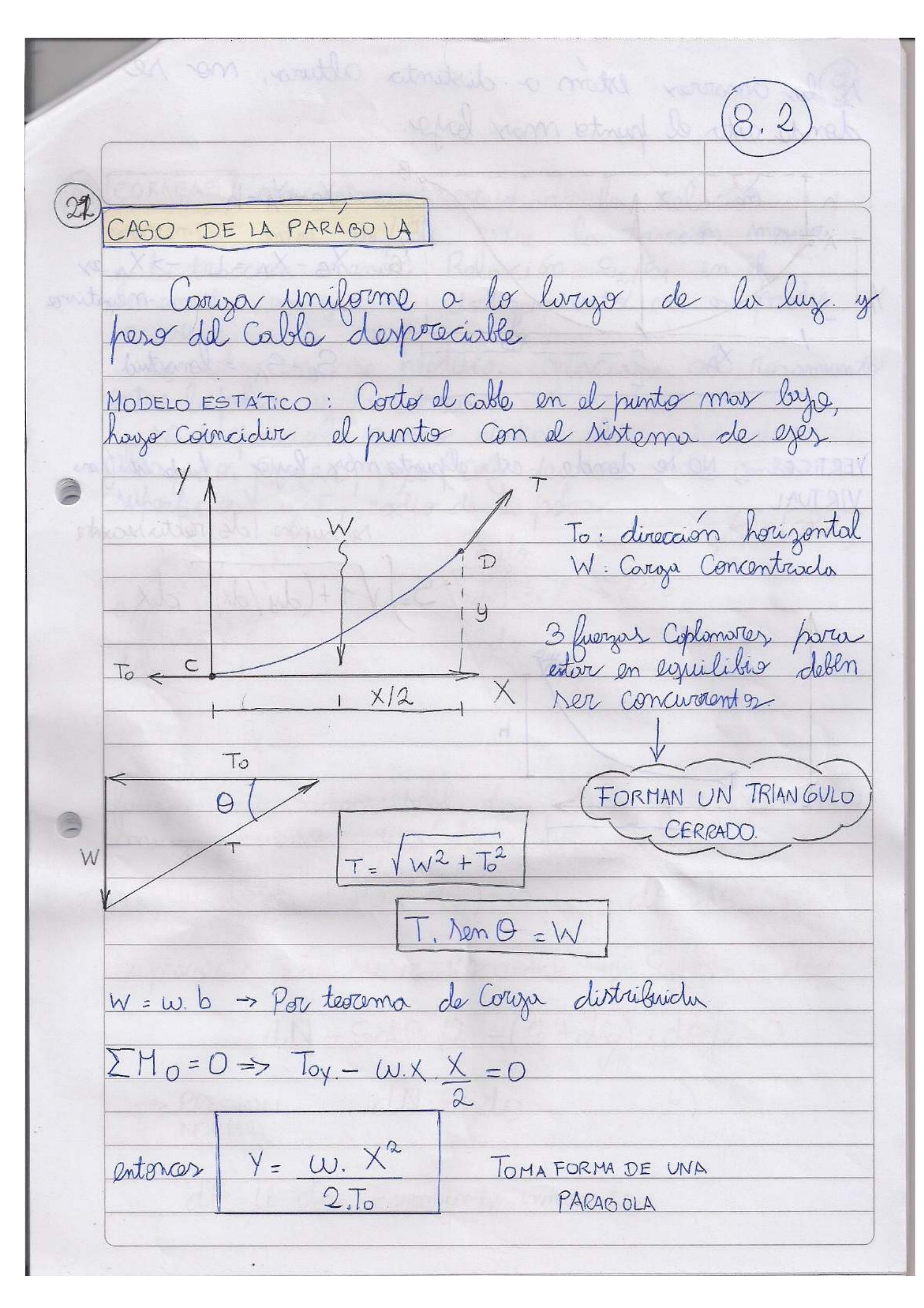
$$S = \sqrt{H^2 + Q^2} \quad (b)$$

(22)

CASO DE LA PARABOLA

Carga uniforme a lo largo de la luz y peso del Cable despreciable

MODELO ESTÁTICO: Corto el cable en el punto mas bajo, hago coincidir el punto con el sistema de ejes



To: dirección horizontal
W: Carga Concentrada

3 fuerzas Coplanares para estar en equilibrio deben ser concurrentes → FORMAN UN TRIANGULO CERRADO.

$$T = \sqrt{W^2 + T_0^2}$$

$$T \cdot \operatorname{sen}\theta = W$$

$W = w \cdot b$ → Por teorema de Carga distribuida

$$\sum M_0 = 0 \Rightarrow T_0 y - w \cdot x \cdot \frac{x}{2} = 0$$

entonces
$$Y = \frac{w \cdot X^2}{2 \cdot T_0}$$

TOMA FORMA DE UNA PARABOLA

Si los amarres están a distinta altura, no se donde esta el punto mas bajo.

$Y_B - Y_A = h$

$X_B - X_A = L$ → X_A es negativo

$S_B + S_A$ = longitud.

VERTICE VIRTUAL → NO se donde esta el punto mas bajo, puede estar fuera

se supone de recta secante

$$S = \int \sqrt{1 + (dy/dx)^2}\, dx$$

(22) CORREAS | nos interesa estudiar la relación máxima entre S_2/S_1 entre la tracción mayor y la tracción menor. Relación S_2/S_1 en el momento en que el deslizamiento va a producirse.

La rotación se produce gracias al rozamiento entre la polea y la correa.

Se proporciona como dato el ángulo de abrazado β (RAD), μ (coef. de roce entre ambas superficies) y r, radio de la polea.

$\beta = [rad]$

$d\theta$ F θ β S_1 S_2

$r\,d\theta$ S $S+dS$ dF dN $d\theta$

fuerzas proyectadas sobre tangente y ángulo $d\theta$ muy pequeño $\cos(d\theta/2) = 1$

$$S + dF - (S + dS) = 0 \qquad dF = dS \qquad a)$$

si proyecto sobre su radio medio y $\text{Sen}(d\theta/2) = d\theta/2$

$$dN - S\,d\theta/2 - (S + dS)\cdot d\theta/2 = 0$$

→ PRESION NORMAL $\quad dN = S \cdot d\theta \quad$ b)

$dF = \mu \cdot dN$ Rozamiento inminente

Con a y b

$$dS = \mu . S . d\theta \qquad \frac{dS}{S} = \mu . d\theta \quad (c)$$

relación entre el gradiente de tracción sobre el largo del elemento y la tracción total en la correa en el punto definido por θ.

$$\int_{S_1}^{S_2} \frac{dS}{S} = \mu \int_0^{\beta} d\theta$$

$$\ln\left(\frac{S_2}{S_1}\right) = \mu . \beta$$

$$\boxed{S_2 = S_1 . e^{\mu \beta}}$$ límite sup. de S_2

si invertimos el problema obtenemos el límite inferior

$$\boxed{S_2 = S_1 . e^{-\mu . \beta}}$$

CAP IV ENREJADOS ART. PLANOS

23 **INTRODUCCION** El problema esencial de los enrejados es la determinación de los esfuerzos en las barras. Este problema se soluciona de una manera muy simple por la estática si se adoptan como hipotesis: solicitación en el plano de la estructura; cargas exclusivamente en los nudos, ~~cargas exclusivamente en los nudos~~, nudos idealmente articulados.

ENREJADOS INDEFORMABLES

Un enrejado debe construir un conjunto indeformable, el marco esta formado por 3 barras articuladas. El triangulo constituye entonces la celula elemental indeformable con la cual se formarán los enrejados articulados. Los enrejados simples se constituyen saliendo de un triangulo elemental y uniendole rigidamente un cuarto nudo por medio de dos barras suplementarias (y así sucesivamente)

b: N° de barras
n = N° de nudos

si agregamos p nudos => agregamos 2p barras

$$b = 2n - 3$$ (COND. NEC. PERO NO SUF.)

- Las incognitas son esfuerzos en barras + apoyos

$$\boxed{b + R}$$

Cada nudo: equiv. a fuerzas concurrentes → 2 n ecuaciones

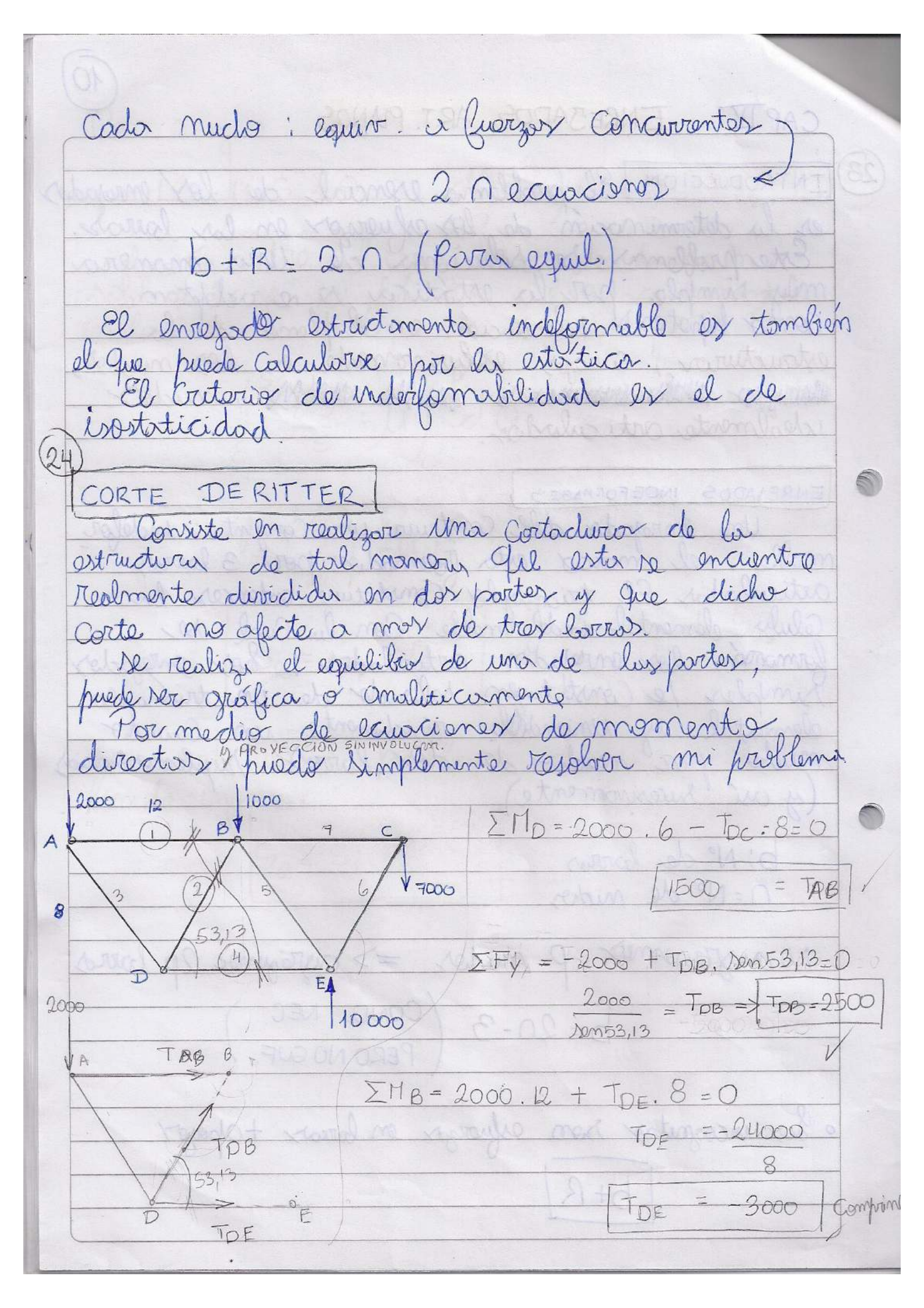
$b + R = 2n$ (Para equil.)

El enrejado estrictamente indeformable es también el que puede calcularse por la estática.
El criterio de indeformabilidad es el de isostaticidad

(24)

CORTE DE RITTER

Consiste en realizar una cortadura de la estructura de tal manera que esta se encuentre realmente dividida en dos partes y que dicho corte no afecte a mas de tres barras.
Se realiza el equilibrio de una de las partes, puede ser gráfica o analíticamente
Por medio de ecuaciones de momento directas y PROYECCION SIN INVOLUCRAR. puedo simplemente resolver mi problema



$\Sigma M_D = 2000 \cdot 6 - T_{DC} \cdot 8 = 0$

$1500 = T_{AB}$

$\Sigma F_y = -2000 + T_{DB} \cdot \operatorname{sen} 53{,}13 = 0$

$\frac{2000}{\operatorname{sen} 53{,}13} = T_{DB} \Rightarrow T_{DB} = 2500$

$\Sigma M_B = 2000 \cdot 12 + T_{DE} \cdot 8 = 0$

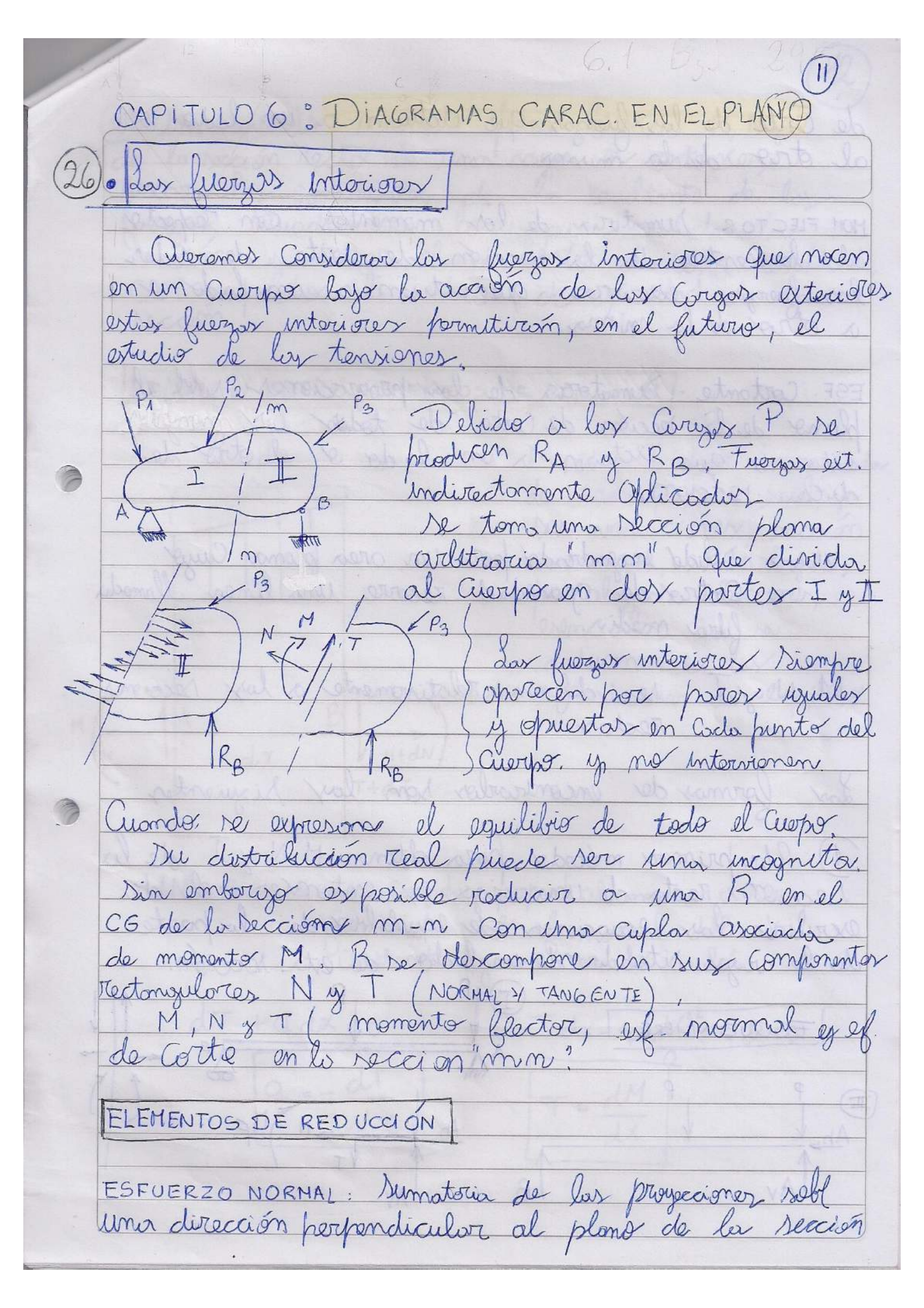
$T_{DE} = \frac{-24000}{8}$

$T_{DE} = -3000$ Comprim.

CAPITULO 6 : DIAGRAMAS CARAC. EN EL PLANO

(26) • Las fuerzas interiores

Queremos Considerar las fuerzas interiores que nacen en un cuerpo bajo la acción de las cargas exteriores estas fuerzas interiores permitirán, en el futuro, el estudio de las tensiones.



Debido a las Cargas P se producen R_A y R_B, Fuerzas ext. indirectamente aplicadas

Se toma una sección plana arbitraria "m m" que divida al cuerpo en dos partes I y II

Las fuerzas interiores siempre aparecen por pares iguales y opuestas en cada punto del cuerpo. y no intervienen

Cuando se expresa el equilibrio de todo el cuerpo.

Su distribución real puede ser una incognita. sin embargo es posible reducir a una R en el CG de la sección m-m con una cupla asociada de momento M, R se descompone en sus componentes rectangulares N y T (NORMAL Y TANGENTE).

M, N y T (momento flector, esf. normal y ef. de corte en la sección "mm".

ELEMENTOS DE REDUCCIÓN

ESFUERZO NORMAL: sumatoria de las proyecciones sobre una dirección perpendicular al plano de la sección

de corte de las fuerzas que actuan a un lado o al otro de la misma

MOM. FLECTOR: Sumatoria de los momentos con respecto al baricentro de la sección de corte de todas las fuerzas exteriores que actuan a un lado o a otro de la misma.

ESF. Cortante: Sumatoria de las proyecciones sobre el plano de la sección de corte de todas las fuerzas exteriores que actuan a un lado o el otro de dicha sección.

VIGA → solido engendrado por un area plana cuyo centro de gravedad recorre una línea llamada fibra media.

M, N y T se definen relativamente a las secciones rectas.

Las formas de encontrarlos son las siguientes

1) Un primer método para obtener M, N y T de la seccion recta de una viga es entonces el de escribir las ecuaciones de equilibrio de la parte de la viga situada de un lado de esta sección.

ESQUEMA LIBRE

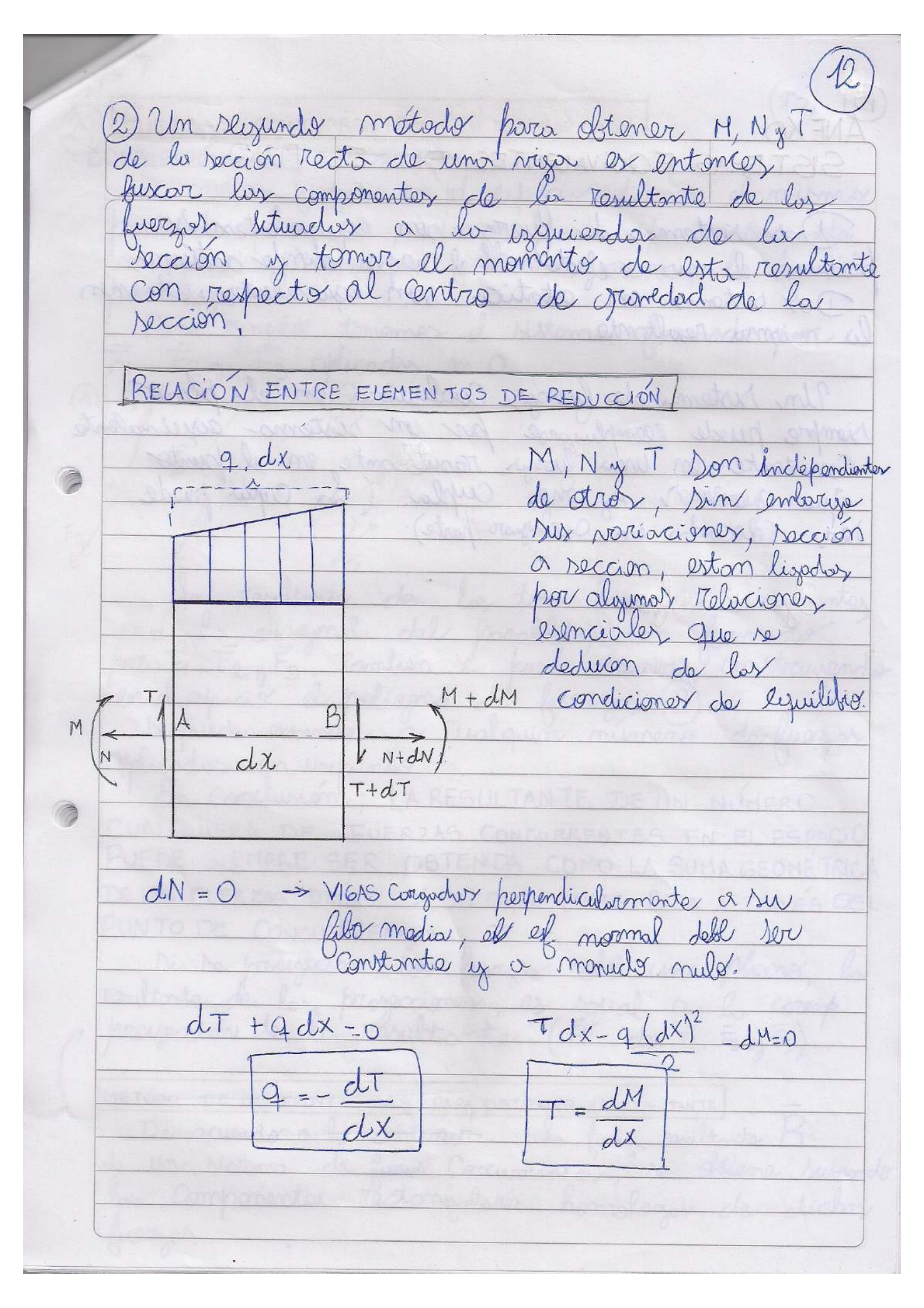
(I) P P A B

(II) P P Ah Av B

Ah N M_F T AV

(2) Un segundo método para obtener M, N y T de la sección recta de una viga es entonces, buscar las componentes de la resultante de las fuerzas situadas a la izquierda de la sección y tomar el momento de esta resultante con respecto al centro de gravedad de la sección.

RELACIÓN ENTRE ELEMENTOS DE REDUCCIÓN



M, N y T son independientes de otros, sin embargo sus variaciones, sección a sección, están ligadas por algunas relaciones esenciales que se deducen de las condiciones de equilibrio.

$dN = 0$ → VIGAS cargadas perpendicularmente a su fibra media, el ef. normal debe ser constante y a menudo nulo.

$dT + q\,dx = 0$

$$q = -\frac{dT}{dx}$$

$T\,dx - q\frac{(dx)^2}{2} - dM = 0$

$$T = \frac{dM}{dx}$$

(15)
ANEXO
SISTEMAS EQUIVALENTES EN EL PLANO

Dos sistemas de fuerzas son equivalentes si producen el mismo efecto sobre el cuerpo donde actúan.
Dos sistemas en estatico son equivalentes si tienen la misma resultante.

Un sistema de fuerzas cualquiera en el plano, siempre puede reemplazarse por un sistema equivalente consistente en una fuerza resultante en el punto que queremos y una cupla. (La cupla puede ser colocada en cualquier parte).

(29) FUERZAS CONCURRENTES EN EL ESPACIO

COMPOSICIÓN Y DESCOMPOSICIÓN.

Si varias fuerzas en el espacio tienen el mismo punto de aplicación, su resultante puede ser determinada, aplicando en forma sucesiva, la ley del paralelogramo

Como ejemplo tenemos el sistema formado por $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$ y $\bar{F}_3$ aplicadas en O.

(A) F_3 D R E F_1 O A F_2 B C

(B) R F_3 $\bar{F}_1$ O F_2

La resultante de las tres fuerzas concurrentes será la diagonal del paralelepípedo formado por $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$ y $\bar{F}_3$. También se puede obtener, construyendo en el espacio el polígono de fuerzas (B).

Se puede extender a cualquier número de fuerzas aplicadas en un punto.

En conclusión; LA RESULTANTE DE UN NÚMERO CUALQUIERA DE FUERZAS CONCURRENTES EN EL ESPACIO, PUEDE SIEMPRE SER OBTENIDA COMO LA SUMA GEOMÉTRICA DE LAS FUERZAS DADAS Y SU RESULTANTE PASA A TRAVÉS DEL PUNTO DE CONCURRENCIA.

Si se proyectan las fuerzas sobre un plano, la resultante de las proyecciones, es igual a la corresp. proyección de la resultante. ($\bar{R}'$ de $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$ y $\bar{F}_3$).

METODO DE LAS PROYECCIONES PARA OBTENER LA RESULTANTE

De acuerdo a lo anterior. La fuerza resultante $\bar{R}$ de un sistema de fuerzas concurrentes, se obtiene sumando las componentes rectangulares homologas de dichas fuerzas.

sea un sistema X, Y y Z. La resultante $\bar{R}$ será igual a la suma vectorial de las fuerzas dadas:

$$\bar{R} = \sum \bar{F_i}$$

$$\begin{cases} F \cdot \cos\theta_x = F_x \\ F_y = F \cdot \cos\theta_y \\ F_z = F \cdot \cos\theta_z \end{cases}$$

$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$

COSENOS DIRECTORES

$$R_x \cdot \hat{\imath} + R_y \cdot \hat{\jmath} + R_z \cdot \hat{k} = \sum \left(F_x \hat{\imath} + F_y \hat{\jmath} + F_z \hat{k} \right)$$

$$= \sum (F_x \hat{\imath}) + \sum (F_y \hat{\jmath}) + \sum (F_z \hat{k})$$

$R_x = \sum F_x$; $R_y = \sum F_y$ $R_z = \sum F_z$ serán las componentes rect. de $\bar{R}$.

$$\boxed{R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}}$$ (MODULO)

$$\boxed{\cos\theta_x = \frac{R_x}{R}} \quad \boxed{\cos\theta_y = \frac{R_y}{R}} \quad \boxed{\cos\theta_z = \frac{R_z}{R}}$$ (DIRECCIÓN)

$$\bar{F} = F \cdot \bar{\lambda} \rightsquigarrow \bar{\lambda} = \cos\theta_x \cdot \hat{\imath} + \cos\theta_y \cdot \hat{\jmath} + \cos\theta_z \cdot \hat{k}$$

MOM. CON RESPECTO A UN PUNTO: En el espacio las rotaciones son con respecto a ejes y no a puntos. Este concepto es puramente matemático.

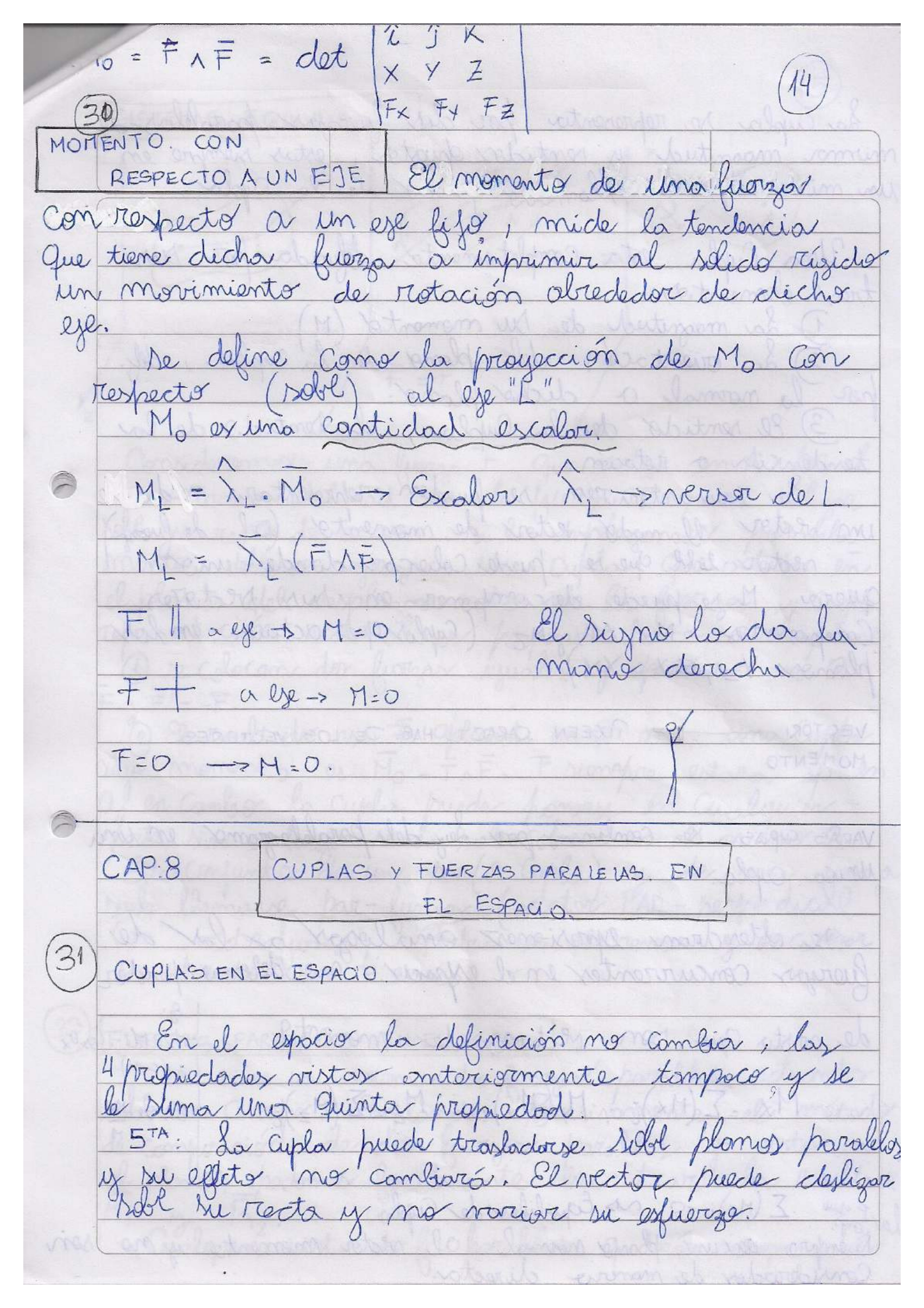
$$\bar{M}_o = \bar{r} \wedge \bar{F}$$

└→ PERPENDICULAR AL PLANO QUE FORMA.

$M_o = r \cdot F \cdot \operatorname{sen}\theta = F \cdot d$

└→ formado por las rectas de acción de r y F

El momento con respecto a un punto en el espacio es en realidad a un eje perpendicular al plano formado por r y F.



$_0 = \bar{F} \wedge \bar{F} = det \begin{vmatrix} i & j & k \\ X & Y & Z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$

(30) **MOMENTO CON RESPECTO A UN EJE**

El momento de una fuerza con respecto a un eje fijo, mide la tendencia que tiene dicha fuerza a imprimir al sólido rígido un movimiento de rotación alrededor de dicho eje.

Se define como la proyección de M_0 con respecto (sobre) al eje "L".

M_0 es una cantidad escalar.

$M_L = \hat{\lambda}_L \cdot \bar{M}_0$ → Escalar $\hat{\lambda}_L$ ⇒ versor de L

$M_L = \bar{\lambda}_L (\bar{F} \wedge \bar{F})$

F ∥ a eje → M = 0   El signo lo da la mano derecha

F ┼ a eje → M = 0

F = 0 → M = 0.

CAP. 8 **CUPLAS Y FUERZAS PARALELAS EN EL ESPACIO.**

(31) CUPLAS EN EL ESPACIO

En el espacio la definición no cambia, las 4 propiedades vistas anteriormente tampoco y se le suma una quinta propiedad.

5TA: La cupla puede trasladarse sobre planos paralelos y su efecto no cambiará. El vector puede deslizar sobre su recta y no variar su esfuerzo.

La cupla se representa por dos fuerzas paralelas de misma magnitud y sentidos opuestos, estas siempre en un mismo plano llamado plano de la cupla.

Una Cupla esta completamente definida por sus tres elementos:

1) La magnitud de su momento (M)

2) La orientación del plano de la cupla, def. por la normal a dicho plano.

3) El sentido de la Cupla, el sentido de la tendencia a rotación.

Los tres anteriores se pueden representar mediante un vector llamado vector de momento. (D.f. de fuerza) vector libre que se puede colocar donde uno quiera. M se puede descomponer en sus vectores componentes M_x, M_y y M_z. (Cuplas que actuan en los planos YZ, ZX, XY).

VECTORI MOMENTO → POSEEN CARACT. HAB. DE LOS VECTORES.

VARIAS CUPLAS se combinan por Ley del paralelogramo. en una unica cupla.

se obtendran expresiones análogas a las de fuerzas concurrentes en el espacio. no debemos perder de vista que son vectores de momento.

$$M_x = \Sigma(M_x)_i \; ; \; M_y = \Sigma(M_y)_i \; ; \; M_z = \Sigma(M_z)_i$$

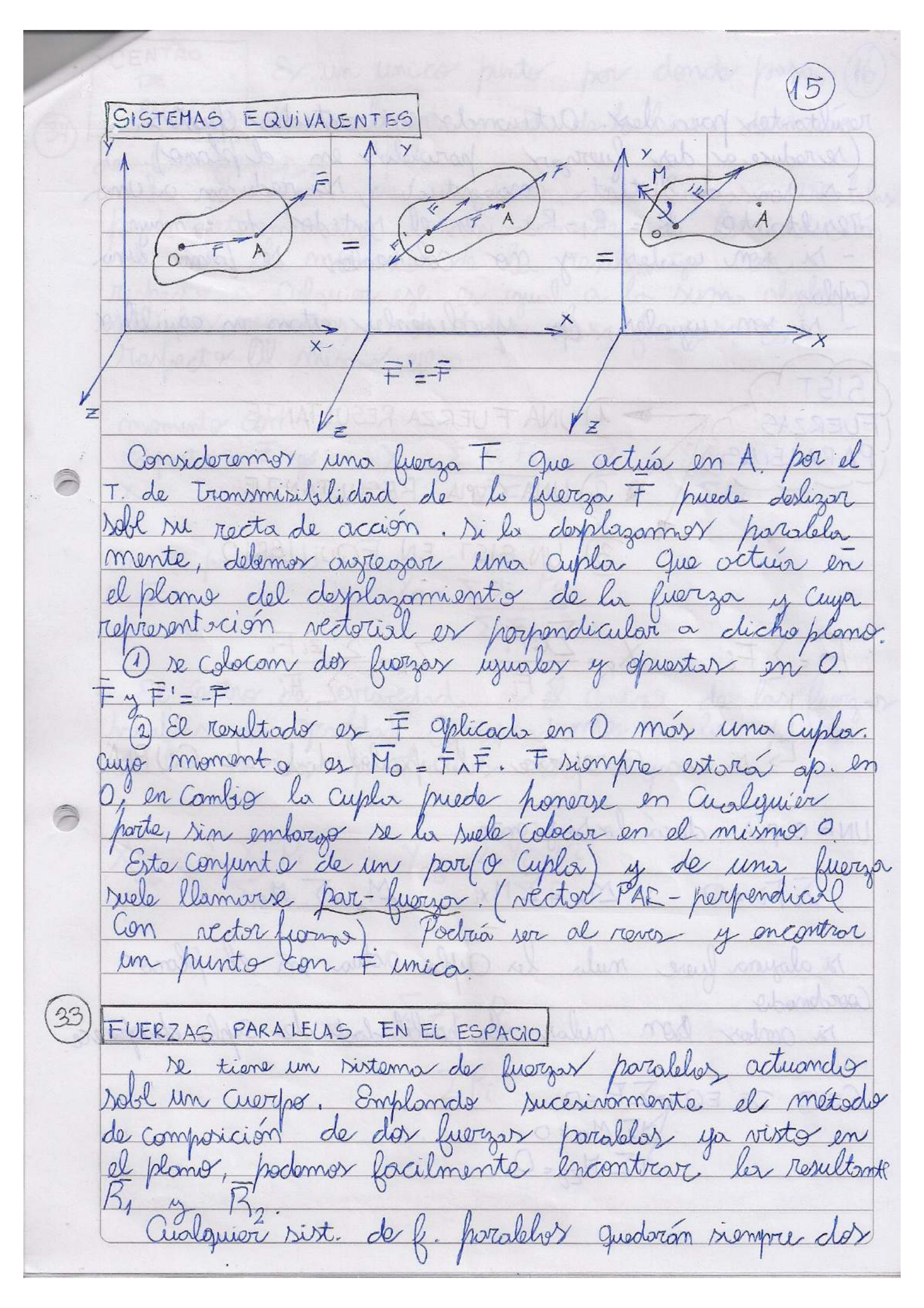
ej:
• $M_x = M_i \cdot \cos\theta_x$ (comp).

$\cos\theta_x = \frac{M_x}{M}$

$\Sigma(M_x)_i = 0$ → Equilibrio de Cupla

las F que comp. siempre son un plano normal al vector momento y no son considerados de manera directa.

SISTEMAS EQUIVALENTES



Consideremos una fuerza F que actúa en A. por el T. de Transmisibilidad de la fuerza $\bar{F}$ puede deslizar sobre su recta de acción. Si la desplazamos paralelamente, debemos agregar una cupla que actúa en el plano del desplazamiento de la fuerza y cuya representación vectorial es perpendicular a dicho plano.

① se colocan dos fuerzas iguales y opuestas en O. $\bar{F}$ y $\bar{F}' = -\bar{F}$.

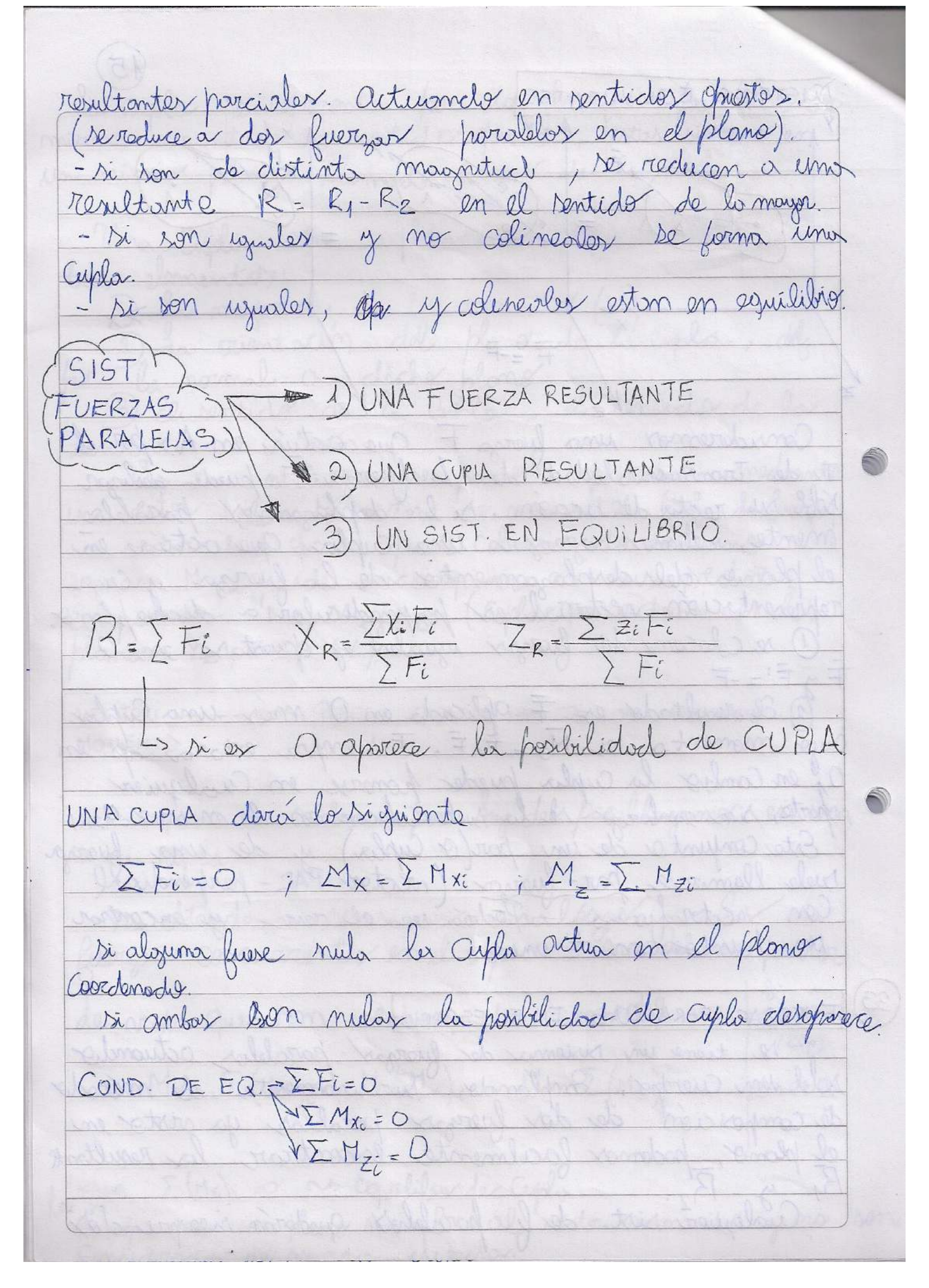
② El resultado es $\bar{F}$ aplicada en O más una Cupla cuyo momento es $\bar{M}_O = \bar{r} \wedge \bar{F}$. F siempre estará ap. en O, en cambio la cupla puede ponerse en cualquier parte, sin embargo se la suele colocar en el mismo O.

Este conjunto de un par (o Cupla) y de una fuerza suele llamarse par-fuerza. (vector PAR - perpendicular con vector fuerza) Podría ser al revés y encontrar un punto con F única.

33 FUERZAS PARALELAS EN EL ESPACIO

Se tiene un sistema de fuerzas paralelas actuando sobre un cuerpo. Empleando sucesivamente el método de composición de dos fuerzas paralelas ya visto en el plano, podemos fácilmente encontrar la resultante $\bar{R}_1$ y $\bar{R}_2$.

Cualquier sist. de f. paralelas quedarán siempre dos



resultantes parciales. actuando en sentidos opuestos.
(se reduce a dos fuerzas paralelas en el plano).
- si son de distinta magnitud, se reducen a una resultante $R = R_1 - R_2$ en el sentido de la mayor.
- si son iguales y no colineales se forma una Cupla.
- si son iguales, op. y colineales estan en equilibrio.

$$R = \sum F_i \qquad X_R = \frac{\sum x_i F_i}{\sum F_i} \qquad Z_R = \frac{\sum z_i F_i}{\sum F_i}$$

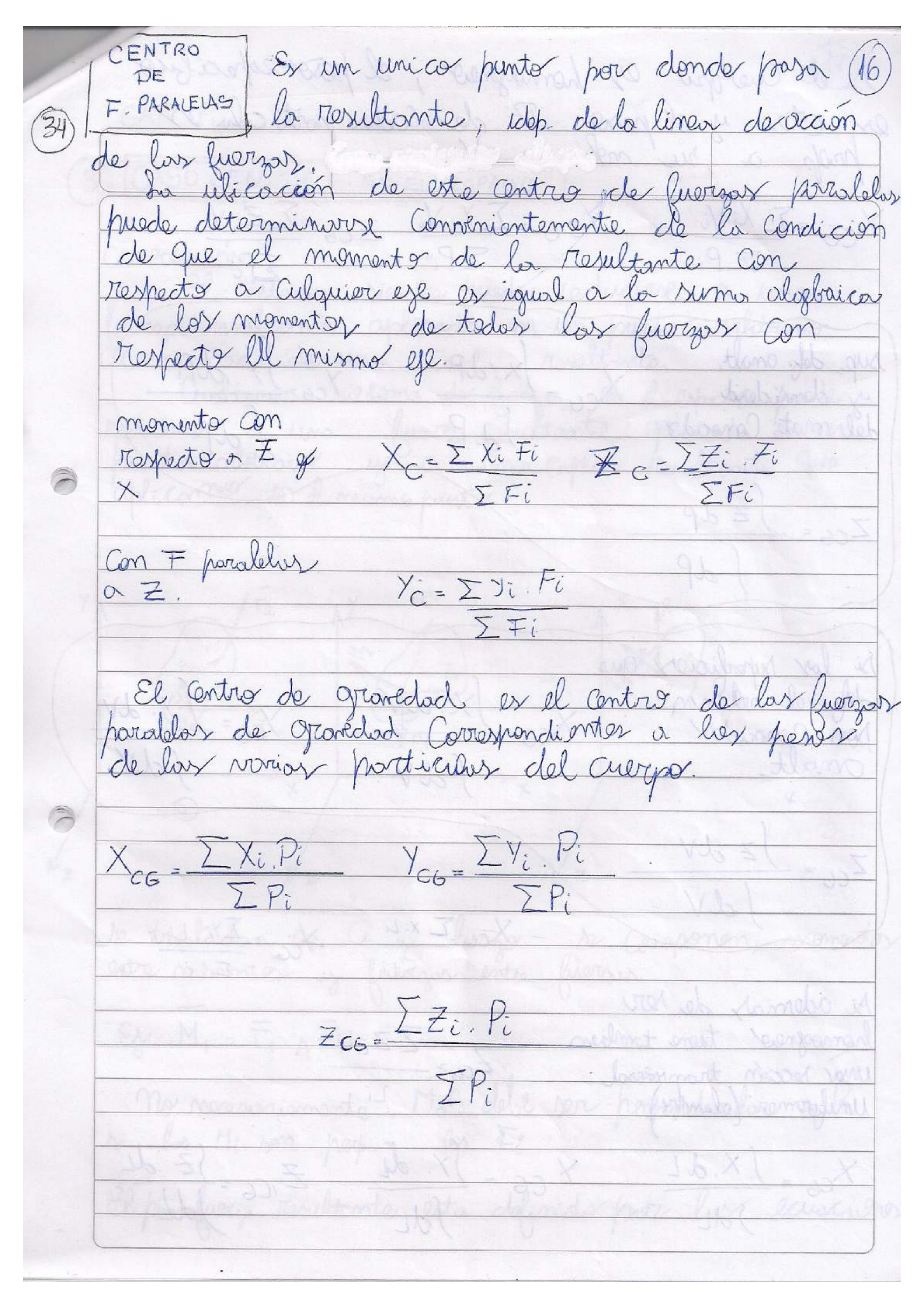
→ si es 0 aparece la posibilidad de CUPLA

UNA CUPLA dará lo siguiente

$$\sum F_i = 0 \quad ; \quad M_x = \sum M_{xi} \quad ; \quad M_z = \sum M_{zi}$$

si alguna fuese nula la cupla actua en el plano coordenado.
si ambas son nulas la posibilidad de cupla desaparece.

COND. DE EQ. → $\sum F_i = 0$
→ $\sum M_{xi} = 0$
→ $\sum M_{zi} = 0$



(34) CENTRO DE F. PARALELAS

Es un unico punto por donde pasa la resultante, idep. de la linea de acción de las fuerzas. (16)

La ubicación de este centro de fuerzas paralelas puede determinarse convenientemente de la condición de que el momento de la resultante con respecto a culquier eje es igual a la suma algebraica de los momentos de todas las fuerzas con respecto al mismo eje.

momento con respecto a Z y X

$$X_C = \frac{\sum X_i F_i}{\sum F_i} \qquad Z_C = \frac{\sum Z_i \cdot F_i}{\sum F_i}$$

Con F paralelas a Z.

$$Y_C = \frac{\sum y_i \cdot F_i}{\sum F_i}$$

El centro de gravedad es el centro de las fuerzas paralelas de gravedad correspondientes a los pesos de las varias particulas del cuerpo.

$$X_{CG} = \frac{\sum X_i \cdot P_i}{\sum P_i} \qquad Y_{CG} = \frac{\sum Y_i \cdot P_i}{\sum P_i}$$

$$Z_{CG} = \frac{\sum Z_i \cdot P_i}{\sum P_i}$$

Si el cuerpo es homogeneo, el peso específico es cte. y el peso P_i de cada partícula es prop. a su volumen V_i

$$X_{CG} = \frac{\sum x_i V_i}{\sum P_i} \quad Y_{CG} = \frac{\sum y_i V_i}{\sum P_i} \quad Z_{CG} = \frac{\sum z_i V_i}{\sum P_i}$$

sup. def. analit. y densidad del mat. conocido

$$X_{CG} = \frac{\int x \, dP}{\int dP} \quad Y_{CG} = \frac{\int y \, dP}{\int dP}$$

$$Z_{CG} = \frac{\int z \, dP}{\int dP}$$

si las superficies que def. el volumen son conocidos analit.

$$X_{CG} = \frac{\int x \, dV}{\int dV} \quad Y_{CG} = \frac{\int y \, dV}{\int dV}$$

$$Z_{CG} = \frac{\int z \, dV}{\int dV}$$

$$X_{CG} = \frac{\sum x_i L_i}{\sum L_i} \quad Y_{CG} = \frac{\sum y_i L_i}{\sum L_i}$$

si además de ser homogeneo tiene también una sección transversal uniforme (alambre).

$$Z_{CG} = \frac{\sum z_i L_i}{L_i}$$

$$X_{CG} = \frac{\int x \, dL}{\int dL} \quad Y_{CG} = \frac{\int y \, dL}{\int dL} \quad Z_{CG} = \frac{\int z \, dL}{\int dL}$$

CAP. 9

(35) CASO GEN. DE F. EN EL ESPACIO

COMPOSICIÓN.

El sistema siempre puede reducirse a una fuerza resultante aplicada en un punto arbitrario acompañada de una cupla resultante.

Cualquier sistema de fuerzas en el espacio puede reducirse a una fuerza resultante aplicada en un punto arbitrario y a una cupla resultante que aplicamos en el mismo punto.

Y, X, Z, $\bar{F}_2$, A_2, r_2, O, r_1, A_1, $\bar{F}_1$ = $\bar{F}_2$, M_2, F_1, O, M_1 = R, $\bar{M}_O^R$, O

(a)

se trasladan a O y luego se componen, momentos entre momentos y fuerzas entre fuerzas.

Ej: $\bar{M}_1 = \bar{r}_1 \wedge \bar{F}_1$

No necesariamente $\bar{M}_O^R$ debe ser perpendicular a $\bar{R}$ si los M_i son perp a los F_i

El par fuerza resultante esta definido por las ecuaciones

$$\bar{R} = \sum F_i \quad y \quad M_O^R = \sum M_i = \sum (\bar{r}_i \wedge F_i)$$

$\bar{R}$ no depende de O ya que $\bar{R}$ es una suma vectorial.

La magnitud y el plano de la Cupla resultante M_O^R depende de la posición del punto O.

Si desplazamos O sobre la línea de acción de la fuerza resultante $\bar{R}$, el momento $\bar{M}_O^R$ no se modifica.

PAR-FUERZA → Es la reducción de un caso de fuerzas generales a una fuerza y un momento.

$$\bar{R} = \sum F_i$$

$$\bar{R} = R_x \hat{i} + R_y \hat{j} + R_z \hat{k}$$

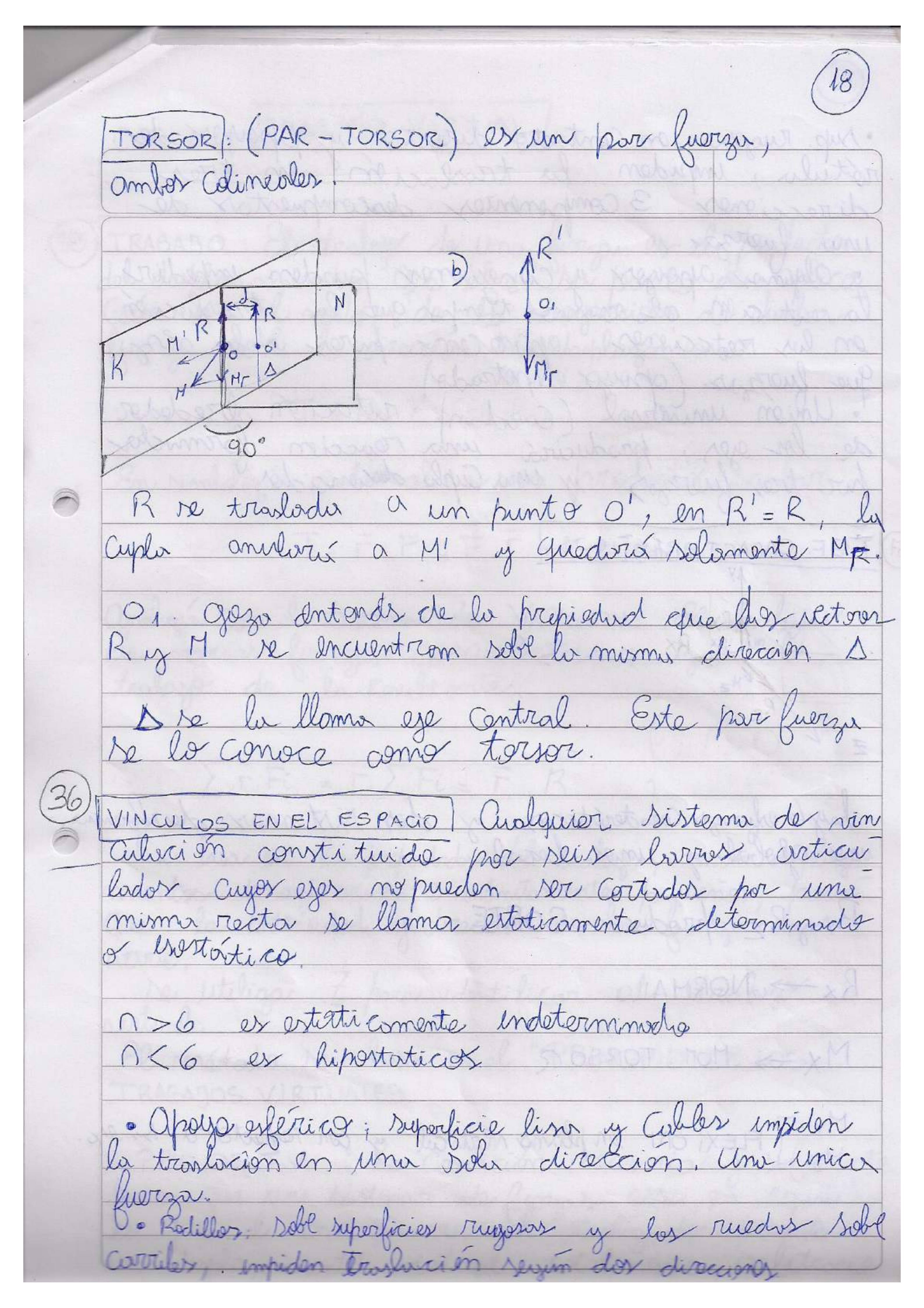
$$M_O^{\bar{R}} = \sum \bar{M}_{iO}$$

$$M_O\bar{R} = M_{ix} \hat{i} + M_{iy} \hat{j} + M_{iz} \hat{k}$$

para resolver un sistema de fuerzas generales en el espacio cuento con 6 ecuaciones LI.

- → 3 proyección
- → 3 de Momento.

TORSOR: (PAR - TORSOR) es un par fuerza, ambos colineales.



R se traslada a un punto O', en R' = R, la cupla anulará a M' y quedará solamente M_R.

O_1 gozo entonces de la propiedad que los vectores R y M se encuentran sobre la misma dirección Δ

Δ se la llama eje central. Este par fuerza se lo conoce como torsor.

(36) VINCULOS EN EL ESPACIO: Cualquier sistema de vinculación constituido por seis barras articulados cuyos ejes no pueden ser cortados por una misma recta se llama estáticamente determinado o isostático.

$n > 6$ es estáticamente indeterminado
$n < 6$ es hipostáticos

• Apoyo esférico; superficie lisa y cables impiden la traslación en una sola dirección. Una única fuerza.
• Rodillos: sobre superficies rugosas y las ruedas sobre carriles, impiden traslación según dos direcciones

• sup. rugosas en contacto directo y apoyos de rótula, impiden la traslación en tres direcciones. 3 componentes descompuestas de una fuerza.
• algunos apoyos y conexiones pueden impedir la rotación al mismo tiempo que la traslación en las reacciones aparecen pares a la vez que fuerzas. (apoyo empotrado)
• Unión universal (Cardan) rotación alrededor de los ejes, producirá una reacción formada por tres fuerzas y una cupla desconocidos.

(37) ESF. CARACTERÍSTICOS

Y, R_Y, M_Y, M_X, R_X, X, M_Z, R_Z, Z

hay 6 esfuerzos característicos y dos sistemas de referencia, uno global y uno local.

R_Y y R_Z producen CORTE

$R_X \rightarrow$ NORMAL

$M_X \rightarrow$ MOM. TORSOR

M_Y, M_Z] FLEXIÓN en plano vertical y con respecto a su eje.

CAP: 10 **TRABAJO VIRTUAL**

(38) TRABAJO: El trabajo de una fuerza es el producto del desplazamiento que sufre su punto de aplicación por el valor de la proyección de dicha fuerza sobre la dirección del desplazamiento.

$$T = d . F . \cos\alpha$$

En simbología vectorial es un producto escalar

$$T = \bar{r} . \bar{F} = \bar{F} . \bar{r} = F . r . \cos\alpha$$

Analogía con el teorema de VARIGNON: El trabajo de varias fuerzas concurrentes es igual al trabajo de la resultante.

$$\sum \bar{r} . \bar{F_i} = \bar{r} . \sum \bar{F_i} = \bar{r} . \bar{R} \quad \left\{ \sum t_v = 0 \right.$$

Se basa en las propiedades del trabajo, serán desplazamientos imaginarios e infinitamente pequeños, para que la intensidad y dirección de la fuerza no varíe.

Se utiliza τ para identificar al trabajo virtual.

El método se basa en el "PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES.

PPIO DE T.V.: La condición necesaria y suficiente para que un sistema de fuerzas este en equilibrio es que el trabajo virtual realizado durante un desplazamiento virtual totalmente arbitrario

del Cuerpo sobre el cual actuan sea nulo.

PPIO TV. para el punto material ligado. Es necesario que el desplazamiento sea compatible con los vinculos no puede ser cualquier desplazamiento.

(39) DIAGRAMAS DE CORRIMIENTO Es un método gráfico, son rectas que dan las componentes verticales y horizontales de los desplazamientos virtuales de un cuerpo.

→ D.C. HORIZONTAL

δU

O1

δV

→ D.C. VERTICAL

Un diagrama de corrimiento siempre pasa por O. debajo del centro de rotación

CIR

Es el centro al cual gira un cuerpo, el termino "instantaneo" hace alusión a que el desplazamiento es infinitesimal.

si un cuerpo es totalmente libl, su CIR puede ser total mente arbitrario. si el cuerpo está aún vinculado parcialmente, el CIR debe ubicarse adecuadamente para respetar, durante la rotación infinitesimal, las condiciones de apoyos existentes.

si a un cuerpo libl le agregamos un apoyo simple, el unico movimiento infinitesimal posible será una rotación alrededor de un CIR; ubicado sobre la recta perpendicular al plano de los rodillos del apoyo simple ya que dicha rotación respeta la condición de apoyo.

si agregamos otro apoyo simple al mismo cuerpo 1, la unica posición posible para el CIR es en la intersección de las dos rectas perpendiculares a los planos de los rodillos, o sea a los dos lugares geométricos.

si colocamos una articulación, equivalente a los dos apoyos simples, sería en esta misma articulación que tuvieramos que poner el CIR. El cuerpo solo puede girar alrededor de dicho punto

si dos cuerpos estan vinculados entre si, aparece tambien CIR relativos. La articulación común sería el CIR relativo de los dos cuerpos. si los cuerpos estan vinculados por dos barras articuladas en sus extremos el CIR relativo estara en el cruce de ambas

farras.

1 2 12

En el caso de vincular varios cuerpos entre si se los numera (0, 1, 2, 3, etc). Sobre un círculo auxiliar que servirá para hacer el inventario de los CIR, se disp. tantos puntos como cuerpos tengamos.

El Centro absoluto de "i" con la fundación será llamado Oi, y se indicará su conocimiento sobre el círculo inventario uniendo los puntos O e i con una cuerda Oi. El relativo será iJ (Ji)

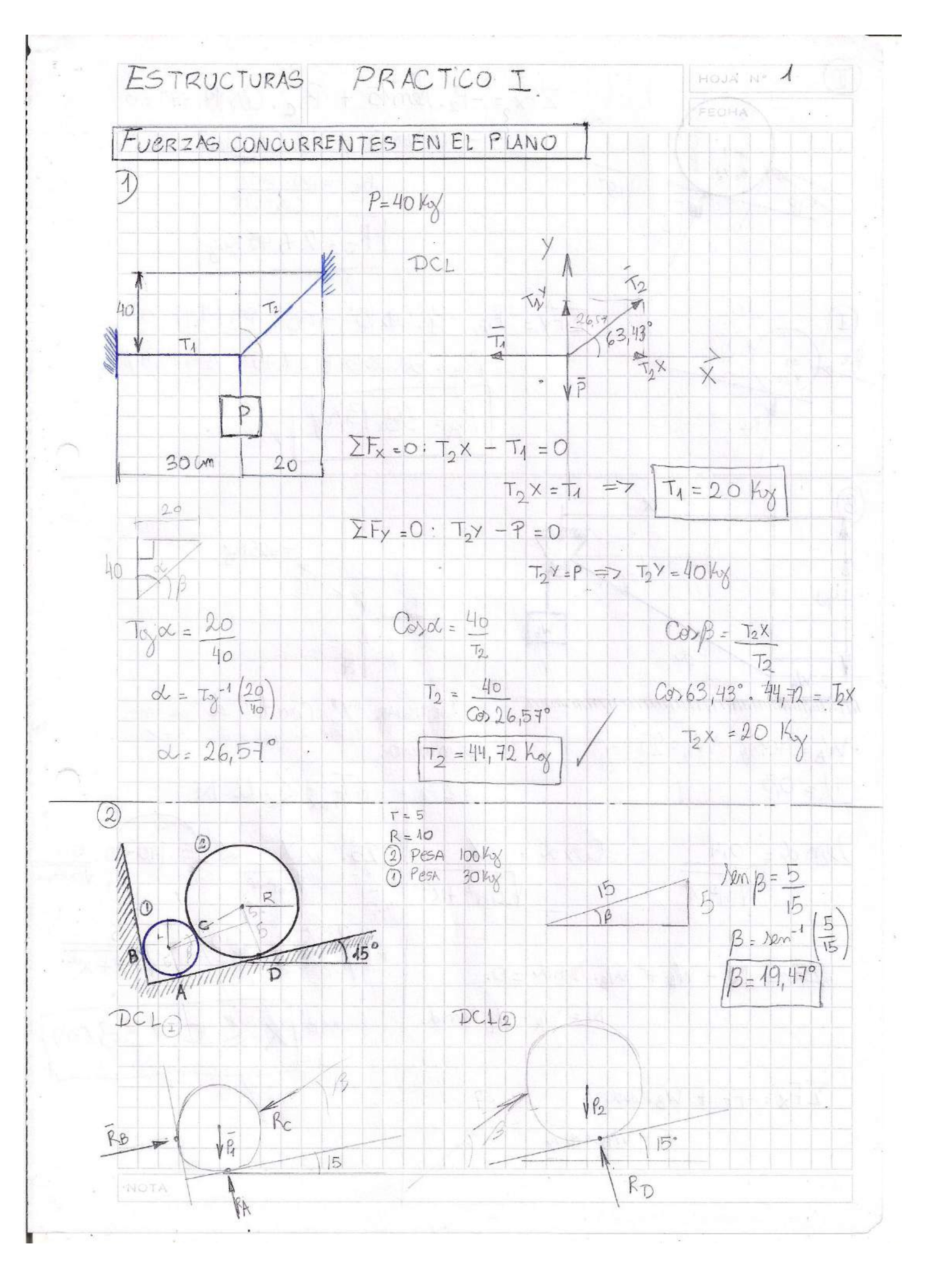
TEOREMA: Si tenemos 3 cuerpos vinculados i, J y K, los tres centros iJ, JK, Ki están alineados en una misma recta.

O2

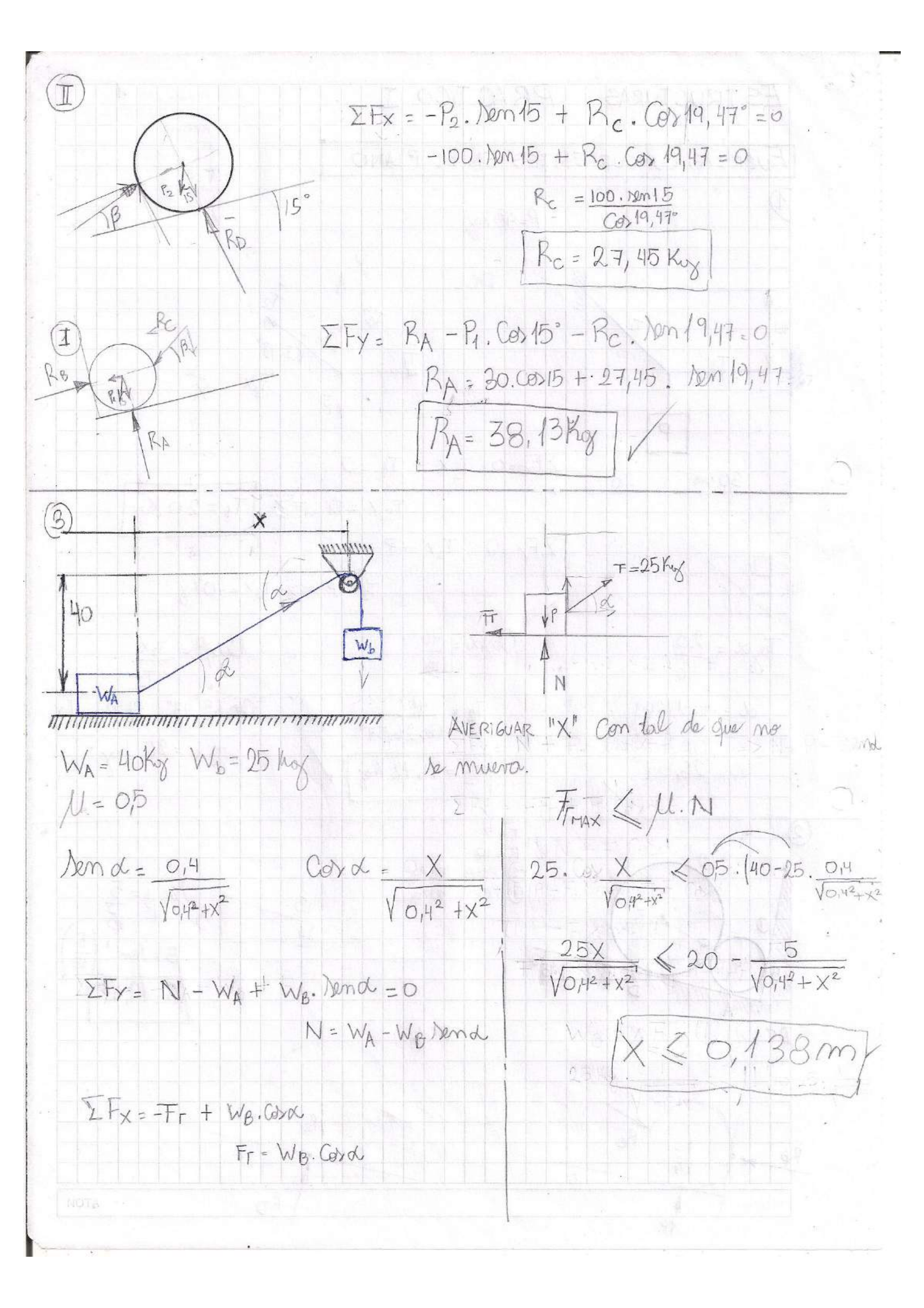
1 2 12

l_{O2}

0 1 2



ESTRUCTURAS PRACTICO I
HOJA N° 1
FECHA
FUERZAS CONCURRENTES EN EL PLANO
1)
P=40 Kg
DCL
40
T2
T1
P
30 cm
20
y
T1y
T2
26,57
63,43°
T1
T2x
x
P
ΣFx = 0 : T2x − T1 = 0
T2x = T1 ⇒ T1 = 20 Kg
ΣFy = 0 : T2y − P = 0
T2y = P ⇒ T2y = 40 Kg
20
40
α
β
Tg α = 20/40
α = Tg⁻¹ (20/40)
α = 26,57°
Cos α = 40/T2
T2 = 40/Cos 26,57°
T2 = 44,72 Kg
Cos β = T2x/T2
Cos 63,43° . 44,72 = T2x
T2x = 20 Kg
2
r = 5
R = 10
② PESA 100 Kg
① PESA 30 Kg
②
①
R
C
B
A
D
15°
15
5
β
sen β = 5/15
β = sen⁻¹ (5/15)
β = 19,47°
DCL ①
DCL ②
β
RB
P1
RC
15
RA
β
P2
15°
RD
NOTA



II

$$\Sigma F_x = -P_2 \cdot \text{sen}\,15 + R_C \cdot \text{Cos}\,19{,}47° = 0$$

$$-100 \cdot \text{sen}\,15 + R_C \cdot \text{Cos}\,19{,}47 = 0$$

$$R_C = \frac{100 \cdot \text{sen}\,15}{\text{Cos}\,19{,}47°}$$

$$\boxed{R_C = 27{,}45\ \text{Kg}}$$

I

$$\Sigma F_y = R_A - P_1 \cdot \text{Cos}\,15° - R_C \cdot \text{sen}\,19{,}47 = 0$$

$$R_A = 30 \cdot \text{Cos}\,15 + 27{,}45 \cdot \text{sen}\,19{,}47$$

$$\boxed{R_A = 38{,}13\ \text{Kg}}$$ ✓

3

$W_A = 40\,\text{Kg}$ $W_b = 25\,\text{Kg}$

$\mu = 0{,}5$

Averiguar "X" con tal de que no se mueva.

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{0{,}4}{\sqrt{0{,}4^2 + X^2}} \qquad \text{Cos}\,\alpha = \frac{X}{\sqrt{0{,}4^2 + X^2}}$$

$$\Sigma F_y = N - W_A + W_B \cdot \text{sen}\,\alpha = 0$$

$$N = W_A - W_B\,\text{sen}\,\alpha$$

$$\Sigma F_x = -F_r + W_B \cdot \text{Cos}\,\alpha$$

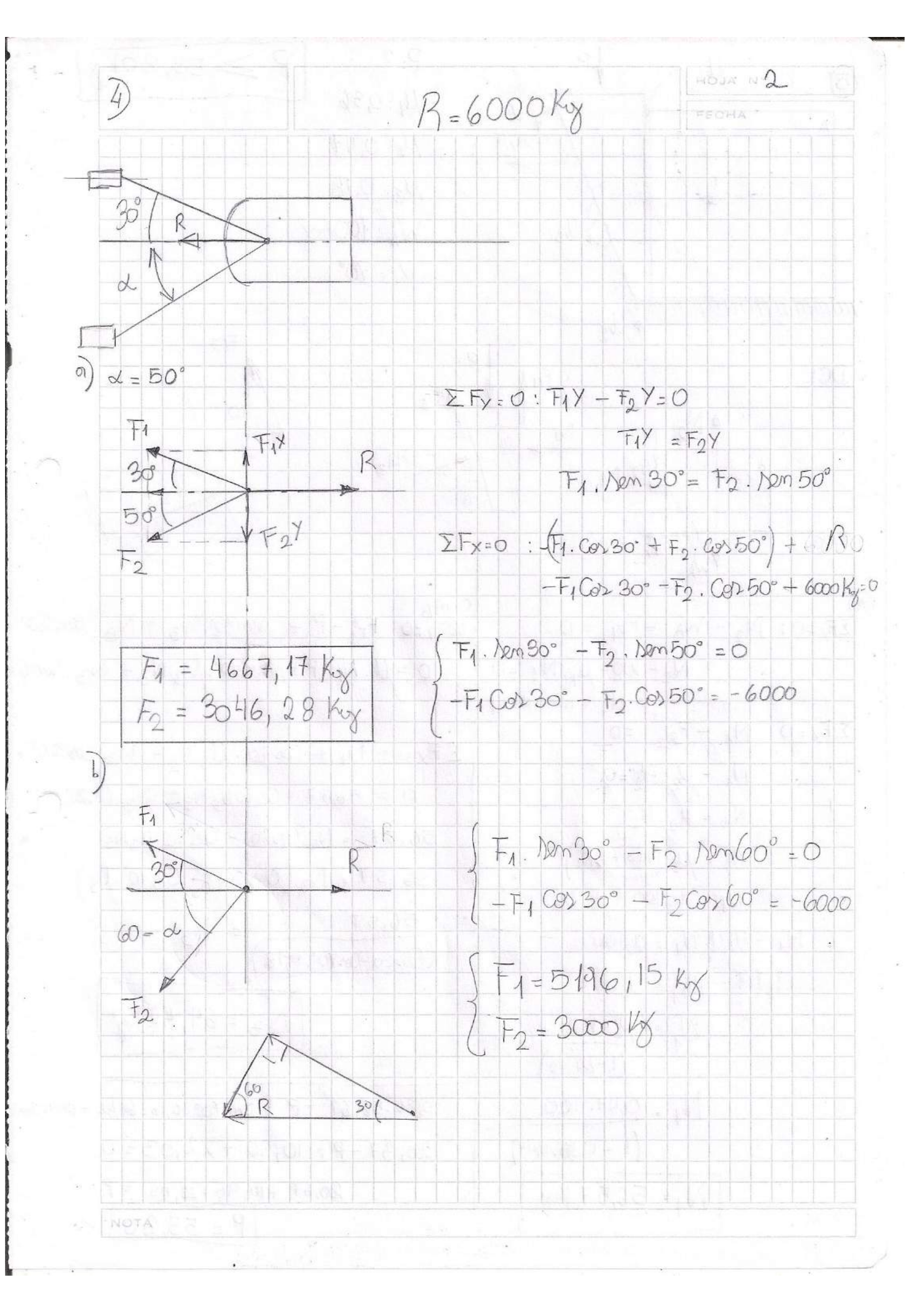
$$F_r = W_B \cdot \text{Cos}\,\alpha$$

$$F_{r\,MAX} \leq \mu \cdot N$$

$$25 \cdot \frac{X}{\sqrt{0{,}4^2 + x^2}} \leq 0{,}5 \cdot \left(40 - 25 \cdot \frac{0{,}4}{\sqrt{0{,}4^2 + x^2}}\right)$$

$$\frac{25X}{\sqrt{0{,}4^2 + x^2}} \leq 20 - \frac{5}{\sqrt{0{,}4^2 + X^2}}$$

$$\boxed{X \leq 0{,}138\ \text{m}}$$



4) HOJA N° 2 FECHA

$R = 6000\,Kg$

a) $\alpha = 50°$

$\Sigma F_y = 0 : F_1Y - F_2Y = 0$

$F_1Y = F_2Y$

$F_1 . \text{sen } 30° = F_2 . \text{sen } 50°$

$\Sigma F_x = 0 : -(F_1 . \text{Cos } 30° + F_2 . \text{Cos } 50°) + R\,0$

$-F_1 \text{Cos } 30° - F_2 . \text{Cos } 50° + 6000\,Kg = 0$

$$\begin{cases} F_1 . \text{sen } 30° - F_2 . \text{sen } 50° = 0 \\ -F_1 \text{Cos } 30° - F_2 . \text{Cos } 50° = -6000 \end{cases}$$

$F_1 = 4667,17\,Kg$

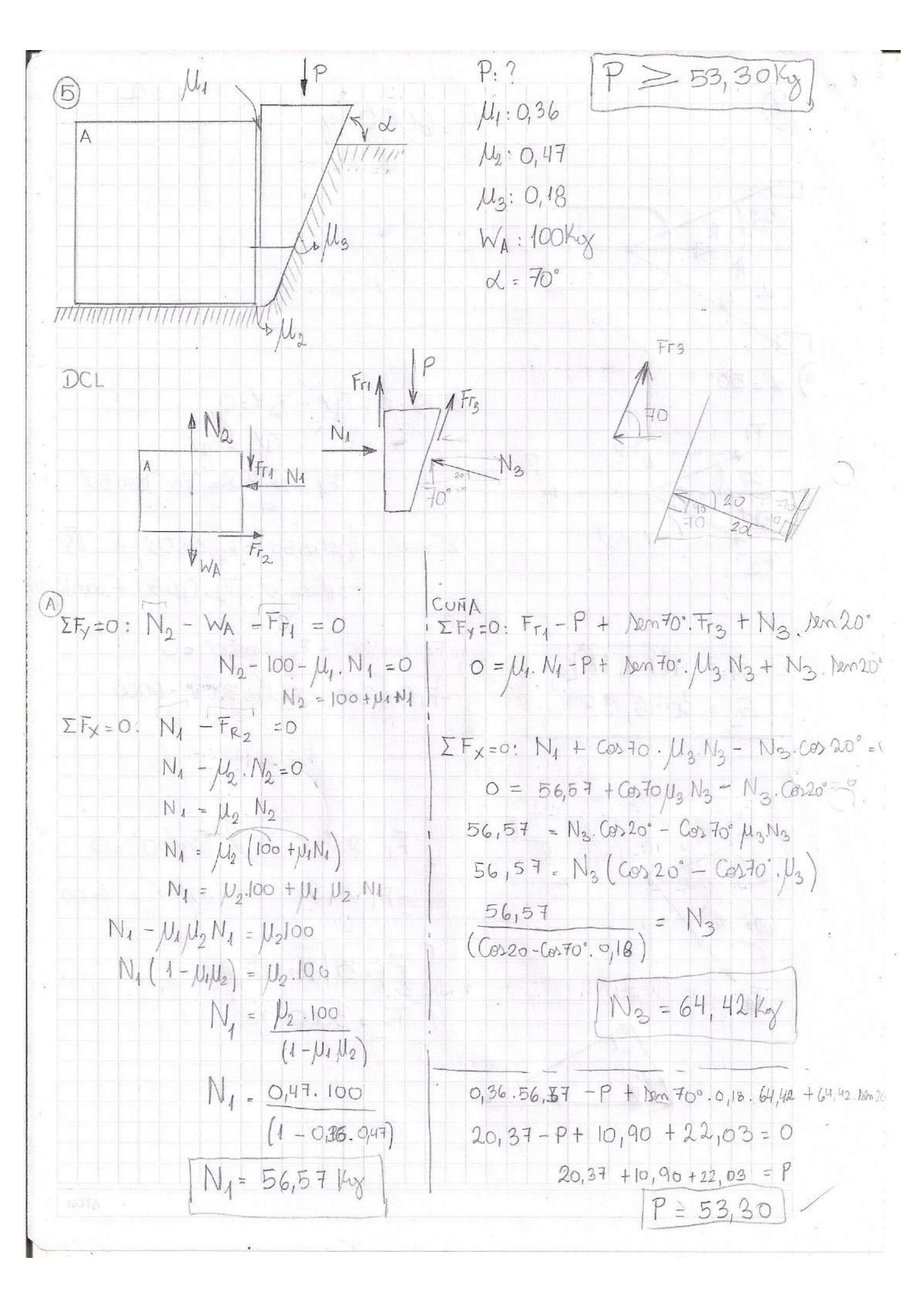
$F_2 = 3046,28\,Kg$

b)

$$\begin{cases} F_1 . \text{sen } 30° - F_2 . \text{sen } 60° = 0 \\ -F_1 \text{Cos } 30° - F_2 \text{Cos } 60° = -6000 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_1 = 5196,15\,Kg \\ F_2 = 3000\,Kg \end{cases}$$

NOTA



⑤

P: ?

μ_1: 0,36

μ_2: 0,47

μ_3: 0,18

W_A: 100Kg

$\alpha = 70°$

$P \geq 53,30 Kg$

DCL

(A)

$\Sigma F_y = 0: \; N_2 - W_A - F_{r1} = 0$

$N_2 - 100 - \mu_1 . N_1 = 0$

$N_2 = 100 + \mu_1 N_1$

$\Sigma F_x = 0: \; N_1 - F_{R2} = 0$

$N_1 - \mu_2 . N_2 = 0$

$N_1 = \mu_2 \; N_2$

$N_1 = \mu_2 \left(100 + \mu_1 N_1\right)$

$N_1 = \mu_2 . 100 + \mu_1 \mu_2 . N_1$

$N_1 - \mu_1 \mu_2 N_1 = \mu_2 100$

$N_1 (1 - \mu_1 \mu_2) = \mu_2 . 100$

$N_1 = \dfrac{\mu_2 . 100}{(1 - \mu_1 \mu_2)}$

$N_1 = \dfrac{0,47 . 100}{(1 - 0,36 . 0,47)}$

$N_1 = 56,57 \; Kg$

CUÑA

$\Sigma F_y = 0: \; F_{r1} - P + sen 70° . F_{r3} + N_3 . sen 20°$

$0 = \mu_1 . N_1 - P + sen 70° . \mu_3 N_3 + N_3 . sen 20°$

$\Sigma F_x = 0: \; N_1 + Cos 70 . \mu_3 . N_3 - N_3 . Cos 20° = 0$

$0 = 56,57 + Cos 70 \mu_3 N_3 - N_3 . Cos 20°$

$56,57 = N_3 . Cos 20° - Cos 70° \mu_3 N_3$

$56,57 = N_3 \left(Cos 20° - Cos 70° . \mu_3\right)$

$\dfrac{56,57}{(Cos 20 - Cos 70° . 0,18)} = N_3$

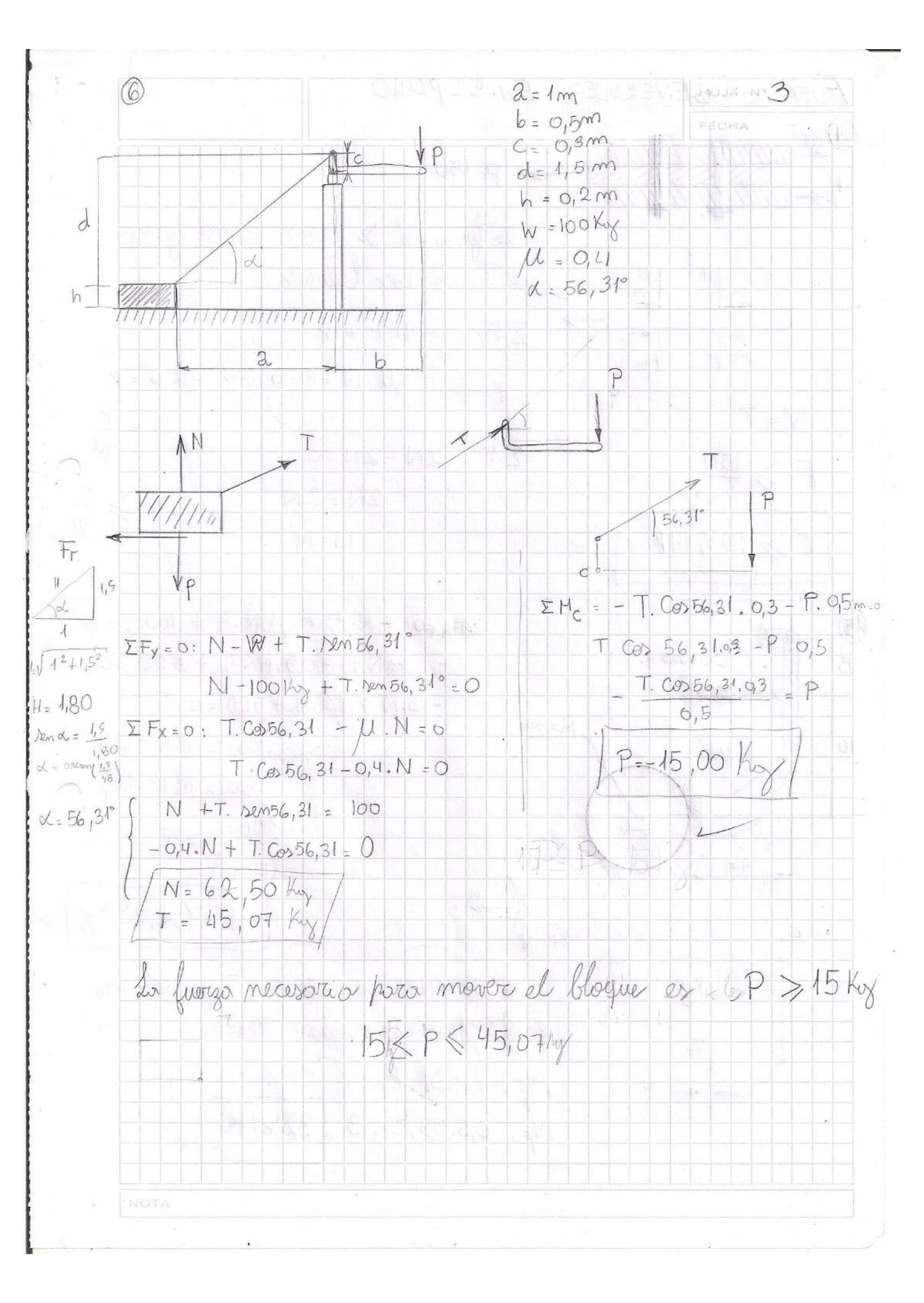
$N_3 = 64,42 \; Kg$

$0,36 . 56,57 - P + sen 70° . 0,18 . 64,42 + 64,42 . sen 20$

$20,37 - P + 10,90 + 22,03 = 0$

$20,37 + 10,90 + 22,03 = P$

$P \geq 53,30$



⑥ HOJA N° 3

$a = 1\,m$
$b = 0{,}5\,m$
$c = 0{,}3\,m$
$d = 1{,}5\,m$
$h = 0{,}2\,m$
$W = 100\,Kg$
$\mu = 0{,}4$
$\alpha = 56{,}31°$

$H = \sqrt{1^2 + 1{,}5^2}$

$H = 1{,}80$

$sen\,\alpha = \frac{1{,}5}{1{,}80}$

$\alpha = arcsen\left(\frac{1{,}5}{1{,}8}\right)$

$\alpha = 56{,}31°$

$\Sigma F_y = 0:\ N - W + T \cdot sen\,56{,}31°$

$N - 100\,Kg + T \cdot sen\,56{,}31° = 0$

$\Sigma F_x = 0:\ T \cdot Cos\,56{,}31 - \mu \cdot N = 0$

$T \cdot Cos\,56{,}31 - 0{,}4 \cdot N = 0$

$$\begin{cases} N + T \cdot sen\,56{,}31 = 100 \\ -0{,}4 \cdot N + T \cdot Cos\,56{,}31 = 0 \end{cases}$$

$N = 62{,}50\,Kg$
$T = 45{,}07\,Kg$

$\Sigma M_c = -T \cdot Cos\,56{,}31 \cdot 0{,}3 - P \cdot 0{,}5\,m = 0$

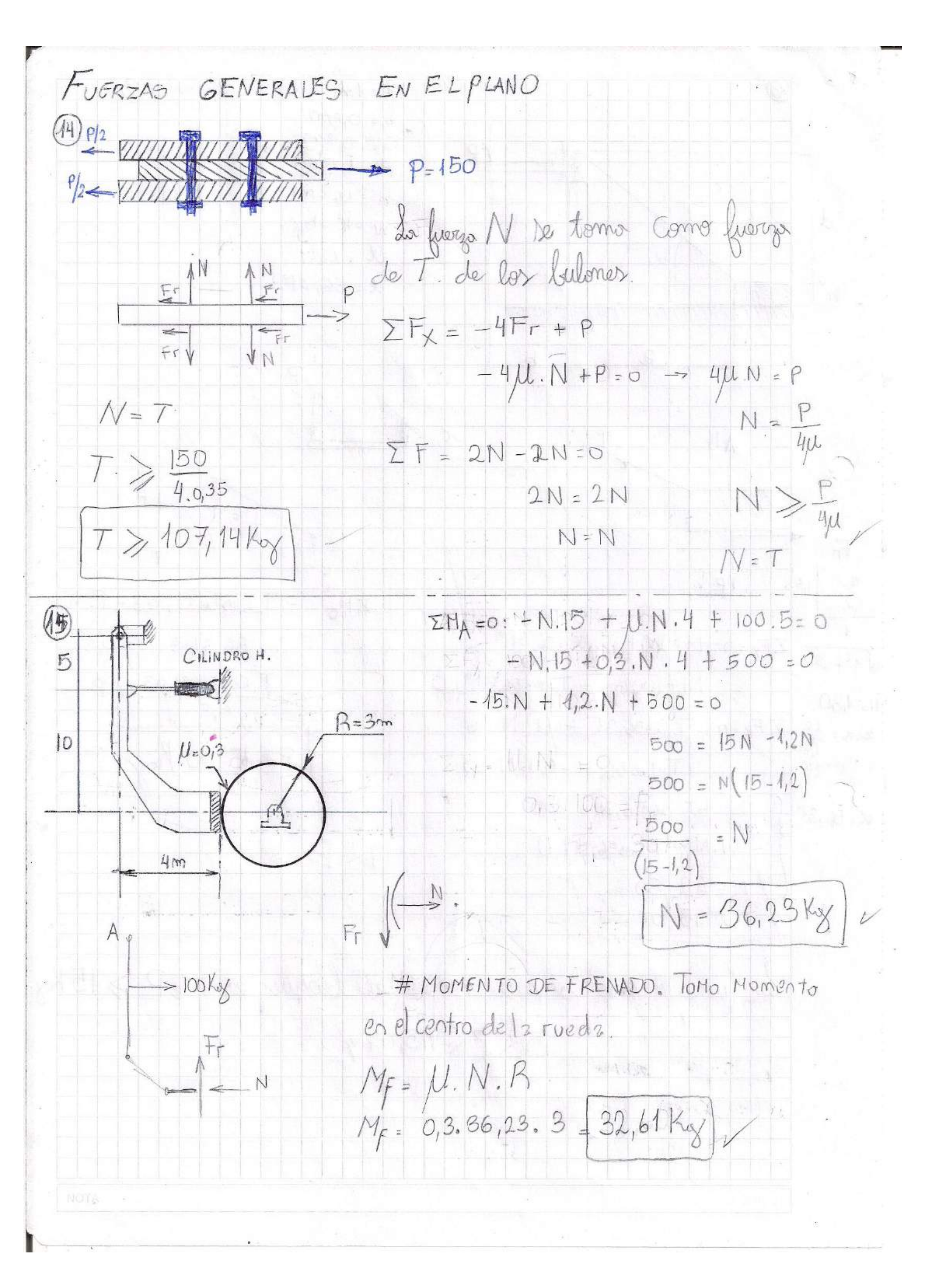
$T \cdot Cos\,56{,}31 \cdot 0{,}3 - P\ 0{,}5$

$-\frac{T \cdot Cos\,56{,}31 \cdot 0{,}3}{0{,}5} = P$

$P = -15{,}00\,Kg$

La fuerza necesaria para mover el bloque es $P \geq 15\,Kg$

$15 \leq P \leq 45{,}07\,Kg$



FUERZAS GENERALES EN EL PLANO

(14)

La fuerza N se tomo como fuerza de T. de los bulones.

$\Sigma F_x = -4F_r + P$

$-4\mu . N + P = 0 \rightarrow 4\mu N = P$

$N = \frac{P}{4\mu}$

$\Sigma F = 2N - 2N = 0$

$2N = 2N$

$N = N$

$N \geqslant \frac{P}{4\mu}$

$N = T$

$N = T$

$T \geqslant \frac{150}{4 . 0,35}$

$\boxed{T \geqslant 107,14 \text{ Kg}}$

---

(15)

$\Sigma M_A = 0: -N.15 + \mu.N.4 + 100.5 = 0$

$-N.15 + 0,3.N.4 + 500 = 0$

$-15.N + 1,2.N + 500 = 0$

$500 = 15N - 1,2N$

$500 = N(15 - 1,2)$

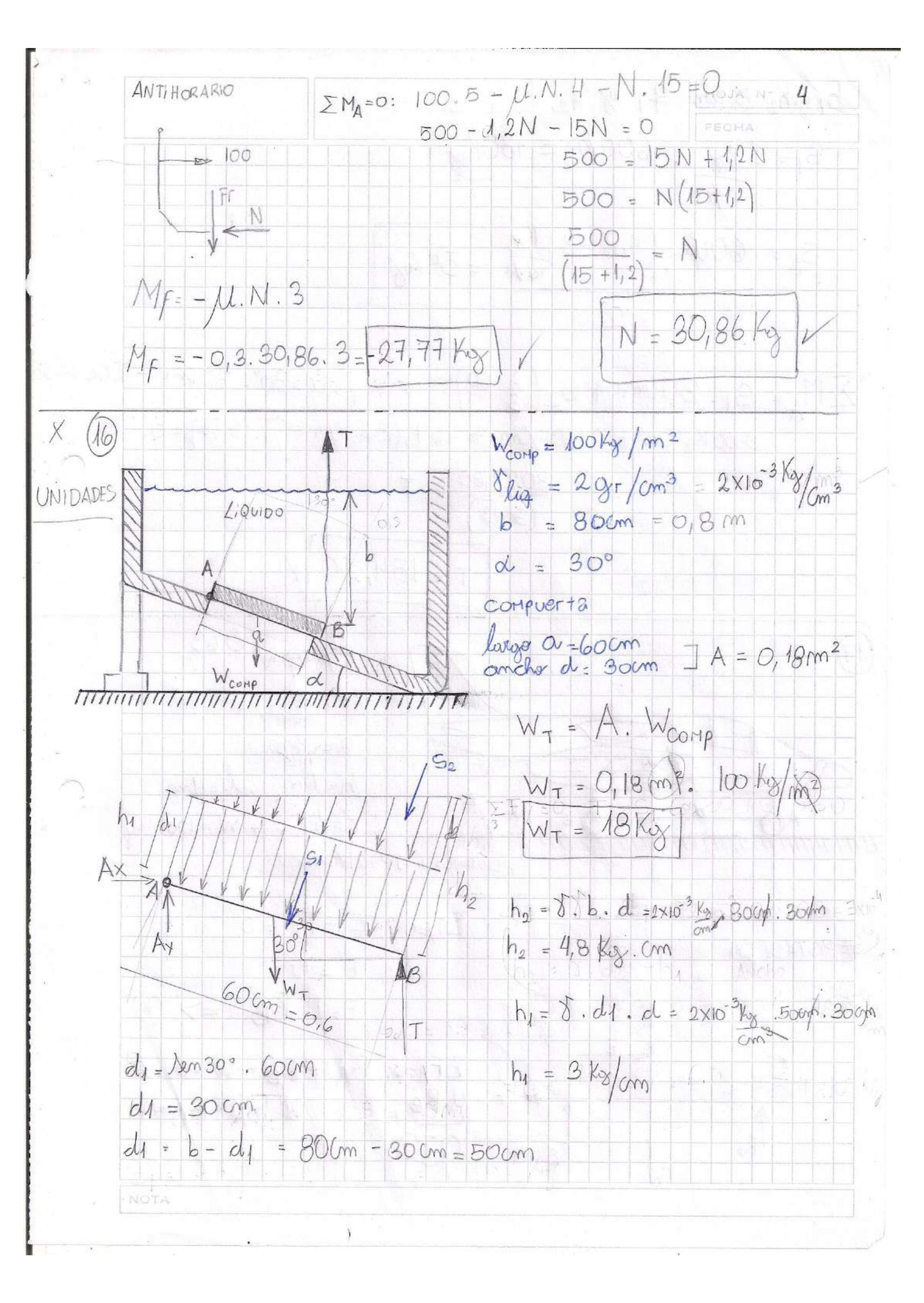
$\frac{500}{(15 - 1,2)} = N$

$\boxed{N = 36,23 \text{ Kg}}$

\# MOMENTO DE FRENADO. Tomo Momento en el centro de la rueda.

$M_F = \mu . N . R$

$M_F = 0,3 . 36,23 . 3 = \boxed{32,61 \text{ Kg}}$



ANTIHORARIO

$\sum M_A = 0: \; 100 \cdot 5 - \mu \cdot N \cdot 4 - N \cdot 15 = 0$

$500 - 1{,}2N - 15N = 0$

$500 = 15N + 1{,}2N$

$500 = N(15 + 1{,}2)$

$\frac{500}{(15 + 1{,}2)} = N$

$N = 30{,}86 \; Kg$ ✓

$M_F = -\mu \cdot N \cdot 3$

$M_F = -0{,}3 \cdot 30{,}86 \cdot 3 = -27{,}77 \; Kg$ ✓

X (16)

UNIDADES

$W_{COMP} = 100 \; Kg/m^2$

$\gamma_{liq} = 2 \; gr/cm^3 = 2 \times 10^{-3} \; Kg/cm^3$

$b = 80 \; cm = 0{,}8 \; m$

$\alpha = 30°$

compuerta

largo $a = 60 \; cm$
ancho d: $30 \; cm$] $A = 0{,}18 \; m^2$

$W_T = A \cdot W_{COMP}$

$W_T = 0{,}18 \; m^2 \cdot 100 \; Kg/m^2$

$W_T = 18 \; Kg$

$h_2 = \gamma \cdot b \cdot d = 2 \times 10^{-3} \; \frac{Kg}{cm^3} \cdot 80 \; cm \cdot 30 \; cm$

$h_2 = 4{,}8 \; Kg \cdot cm$

$h_1 = \gamma \cdot d_1 \cdot d = 2 \times 10^{-3} \; \frac{Kg}{cm^3} \cdot 50 \; cm \cdot 30 \; cm$

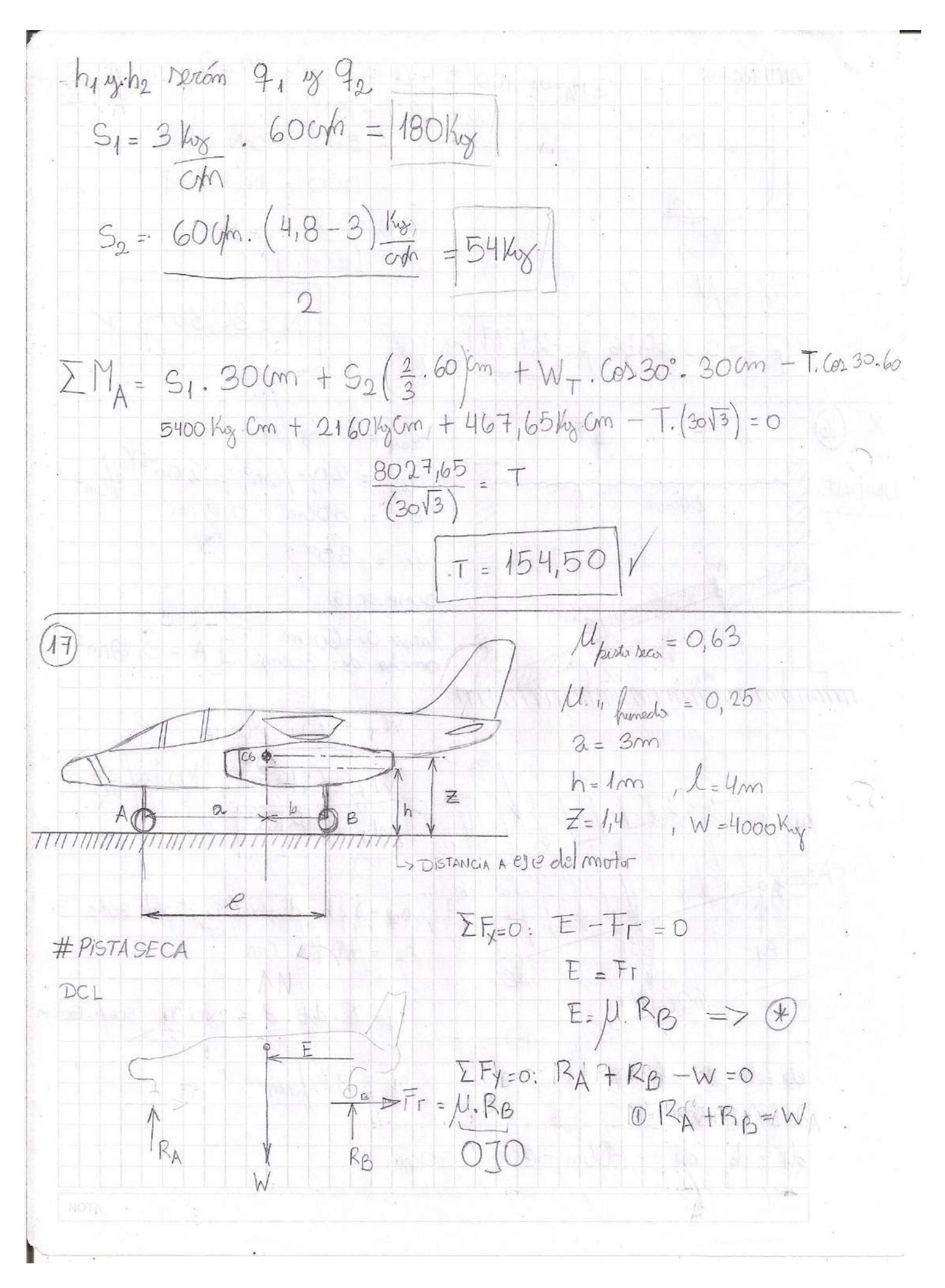
$h_1 = 3 \; Kg/cm$

$d_1 = \text{sen} \, 30° \cdot 60 \; cm$

$d_1 = 30 \; cm$

$d_1 = b - d_1 = 80 \; cm - 30 \; cm = 50 \; cm$

NOTA



- h_1 y h_2 serán q_1 y q_2

$$S_1 = 3\,\frac{Kg}{cm} \cdot 60\,cm = \boxed{180\,Kg}$$

$$S_2 = \frac{60\,cm \cdot (4{,}8 - 3)\frac{Kg}{cm}}{2} = \boxed{54\,Kg}$$

$$\sum M_A = S_1 \cdot 30\,cm + S_2\left(\frac{2}{3} \cdot 60\right)cm + W_T \cdot \cos 30° \cdot 30\,cm - T \cdot \cos 30 \cdot 60$$

$$5400\,Kg\,cm + 2160\,Kg\,cm + 467{,}65\,Kg\,cm - T \cdot (30\sqrt{3}) = 0$$

$$\frac{8027{,}65}{(30\sqrt{3})} = T$$

$$\boxed{T = 154{,}50}$$ ✓

---

(17)

$\mu_{\text{pista seca}} = 0{,}63$

$\mu_{\text{" húmeda}} = 0{,}25$

$a = 3m$

$h = 1m$, $l = 4m$

$Z = 1{,}4$, $W = 4000\,Kg$

→ DISTANCIA A eje del motor

PISTA SECA

DCL

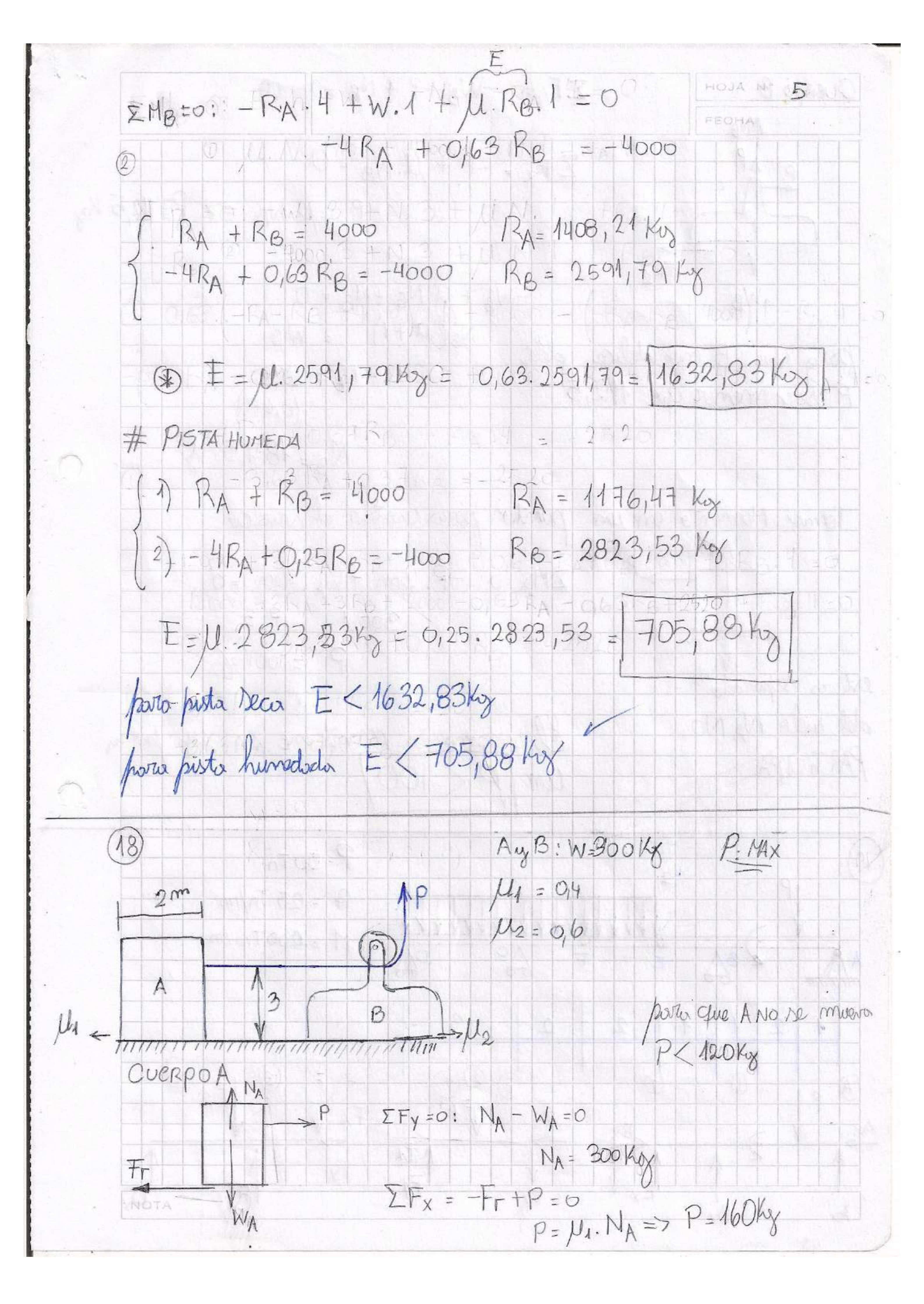
$\sum F_x = 0$: $E - F_r = 0$

$E = F_r$

$E = \mu \cdot R_B \Rightarrow (*)$

$\sum F_y = 0$: $R_A + R_B - W = 0$

① $R_A + R_B = W$



$\Sigma M_B = 0: \; -R_A \cdot 4 + W \cdot 1 + \overbrace{\mu \cdot R_B}^{E} \cdot 1 = 0$

② $-4R_A + 0{,}63\, R_B = -4000$

$$\begin{cases} R_A + R_B = 4000 \\ -4R_A + 0{,}63\, R_B = -4000 \end{cases} \qquad R_A = 1408{,}21\ \text{Kg} \quad R_B = 2591{,}79\ \text{Kg}$$

(*) $E = \mu \cdot 2591{,}79\ \text{Kg} = 0{,}63 \cdot 2591{,}79 = \boxed{1632{,}83\ \text{Kg}}$

\# PISTA HUMEDA

$$\begin{cases} 1)\; R_A + R_B = 4000 \\ 2)\; -4R_A + 0{,}25\, R_B = -4000 \end{cases} \qquad R_A = 1176{,}47\ \text{Kg} \quad R_B = 2823{,}53\ \text{Kg}$$

$E = \mu \cdot 2823{,}53\ \text{Kg} = 0{,}25 \cdot 2823{,}53 = \boxed{705{,}88\ \text{Kg}}$

para pista seca $E < 1632{,}83\ \text{Kg}$

para pista humedada $E < 705{,}88\ \text{Kg}$

---

⑱ A y B: W = 300 Kg P: MAX

$\mu_1 = 0{,}4$

$\mu_2 = 0{,}6$

para que A no se mueva $P < 120\ \text{Kg}$

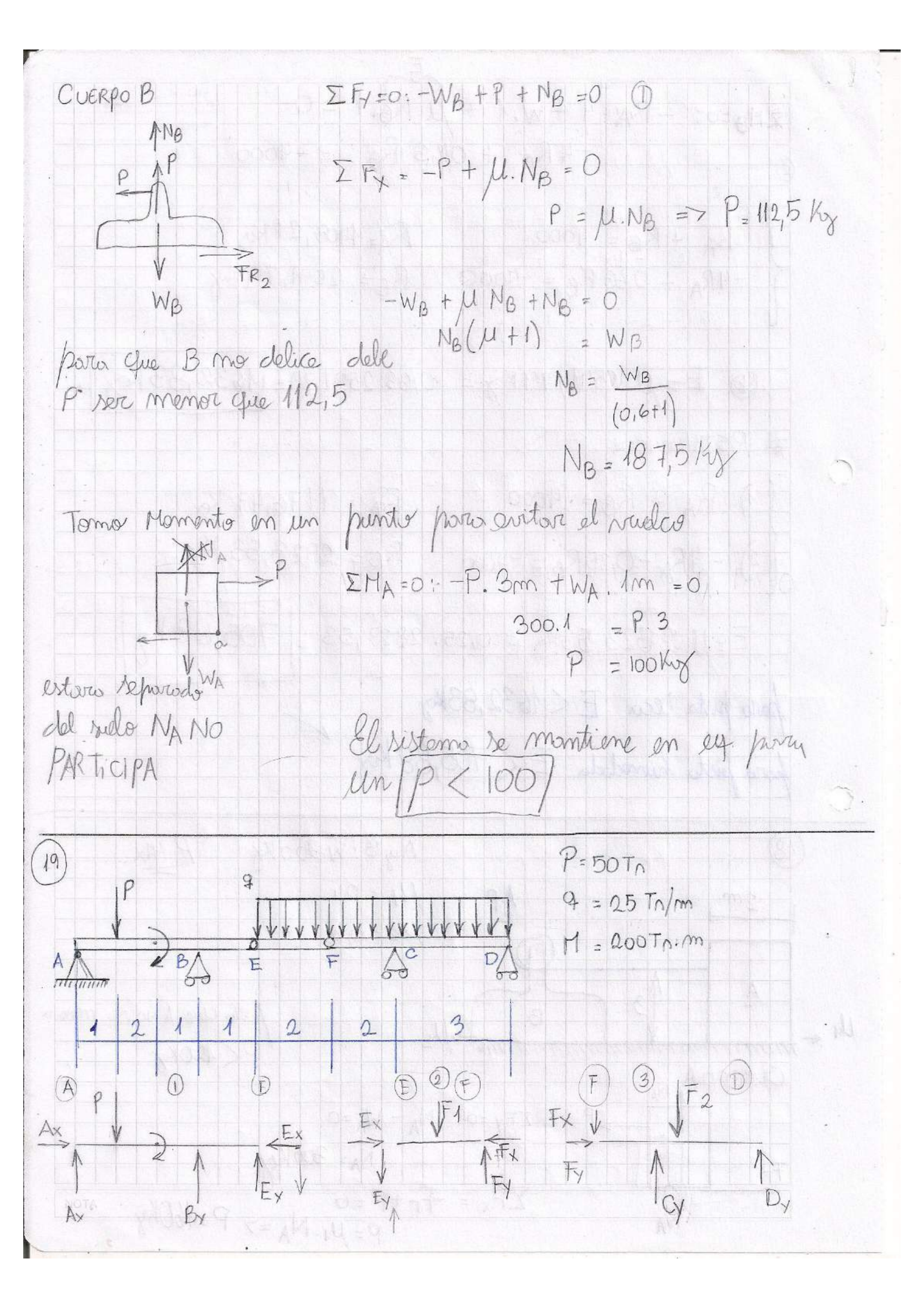
CUERPO A

$\Sigma F_y = 0: \; N_A - W_A = 0$

$N_A = 300\ \text{Kg}$

$\Sigma F_x = -F_r + P = 0$

$P = \mu_1 \cdot N_A \Rightarrow P = 160\ \text{Kg}$



CUERPO B

$\Sigma F_y = 0: -W_B + P + N_B = 0$ ①

$\Sigma F_x = -P + \mu . N_B = 0$

$P = \mu . N_B \Rightarrow P = 112,5$ Kg

$-W_B + \mu N_B + N_B = 0$

$N_B(\mu + 1) = W_B$

$N_B = \dfrac{W_B}{(0,6+1)}$

$N_B = 187,5$ Kg

para que B no delice debe P ser menor que 112,5

Tomo Momento en un punto para evitar el vuelco

$\Sigma M_A = 0: -P . 3m + W_A . 1m = 0$

$300 . 1 = P . 3$

$P = 100$ Kg

estaria separado del suelo N_A NO PARTICIPA

El sistema se mantiene en eq para un $\boxed{P < 100}$

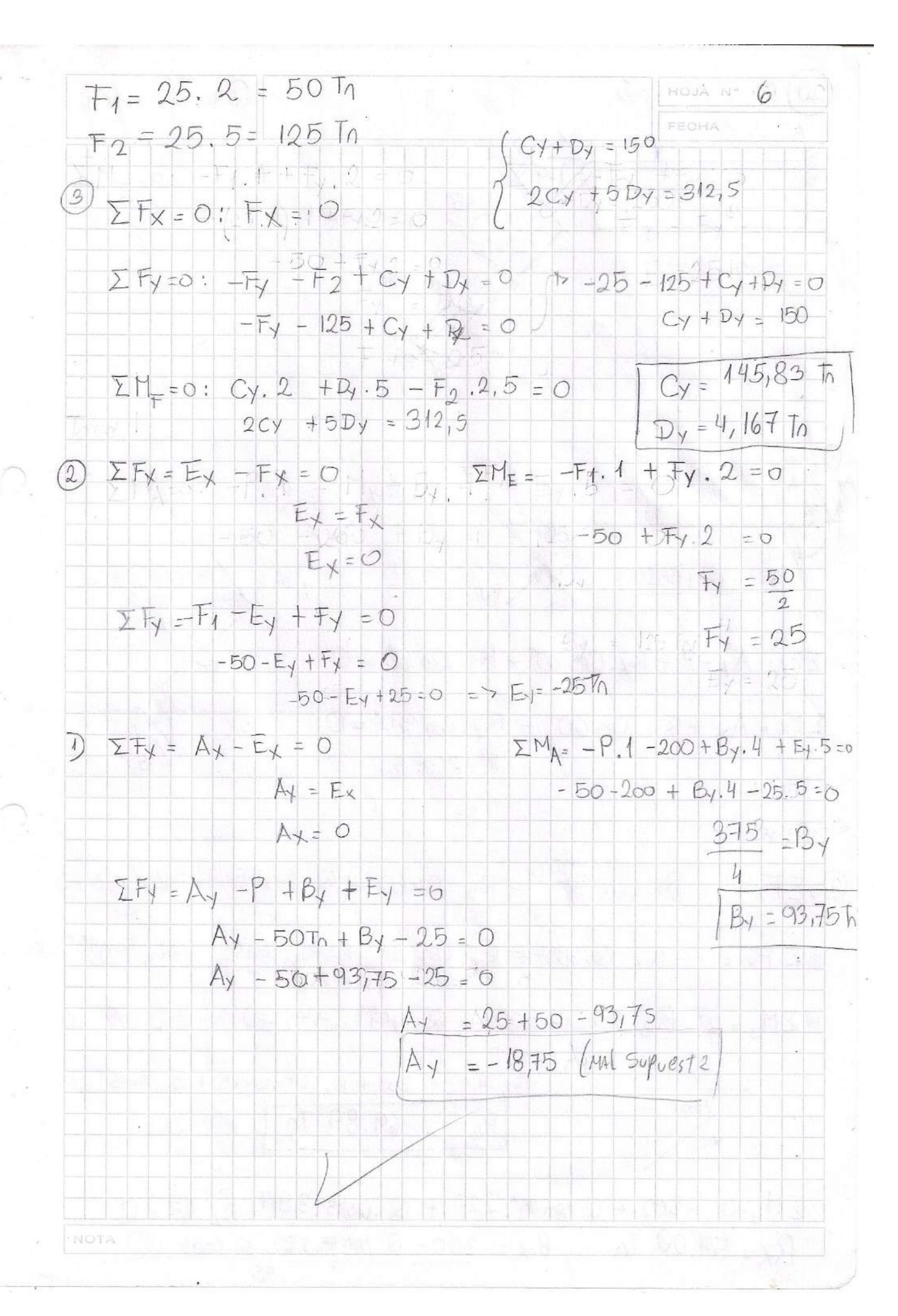
---

(19)

$P = 50$ Tn

$q = 25$ Tn/m

$M = 200$ Tn.m


HOJA N° 6

FECHA

$F_1 = 25 . 2 = 50\ Tn$

$F_2 = 25 . 5 = 125\ Tn$

$\begin{cases} Cy + Dy = 150 \\ 2Cy + 5Dy = 312{,}5 \end{cases}$

(3) $\sum Fx = 0 : Fx = 0$

$\sum Fy = 0 : -Fy - F_2 + Cy + Dy = 0 \Rightarrow -25 - 125 + Cy + Dy = 0$

$-Fy - 125 + Cy + Dy = 0$ $\quad Cy + Dy = 150$

$\sum M_F = 0 : Cy . 2 + Dy . 5 - F_2 . 2{,}5 = 0$

$2Cy + 5Dy = 312{,}5$

$Cy = 145{,}83\ Tn$

$D_y = 4{,}167\ Tn$

(2) $\sum Fx = E_x - Fx = 0$

$E_x = F_x$

$E_x = 0$

$\sum M_E = -F_1 . 1 + Fy . 2 = 0$

$-50 + Fy . 2 = 0$

$Fy = \frac{50}{2}$

$Fy = 25$

$\sum F_y = -F_1 - E_y + Fy = 0$

$-50 - E_y + Fy = 0$

$-50 - Ey + 25 = 0 \Rightarrow Ey = -25\ Tn$

1) $\sum Fy = A_x - E_x = 0$

$Ax = Ex$

$Ax = 0$

$\sum M_A = -P . 1 - 200 + By . 4 + Ey . 5 = 0$

$-50 - 200 + By . 4 - 25 . 5 = 0$

$\frac{375}{4} = By$

$By = 93{,}75\ Tn$

$\sum Fy = A_y - P + B_y + E_y = 0$

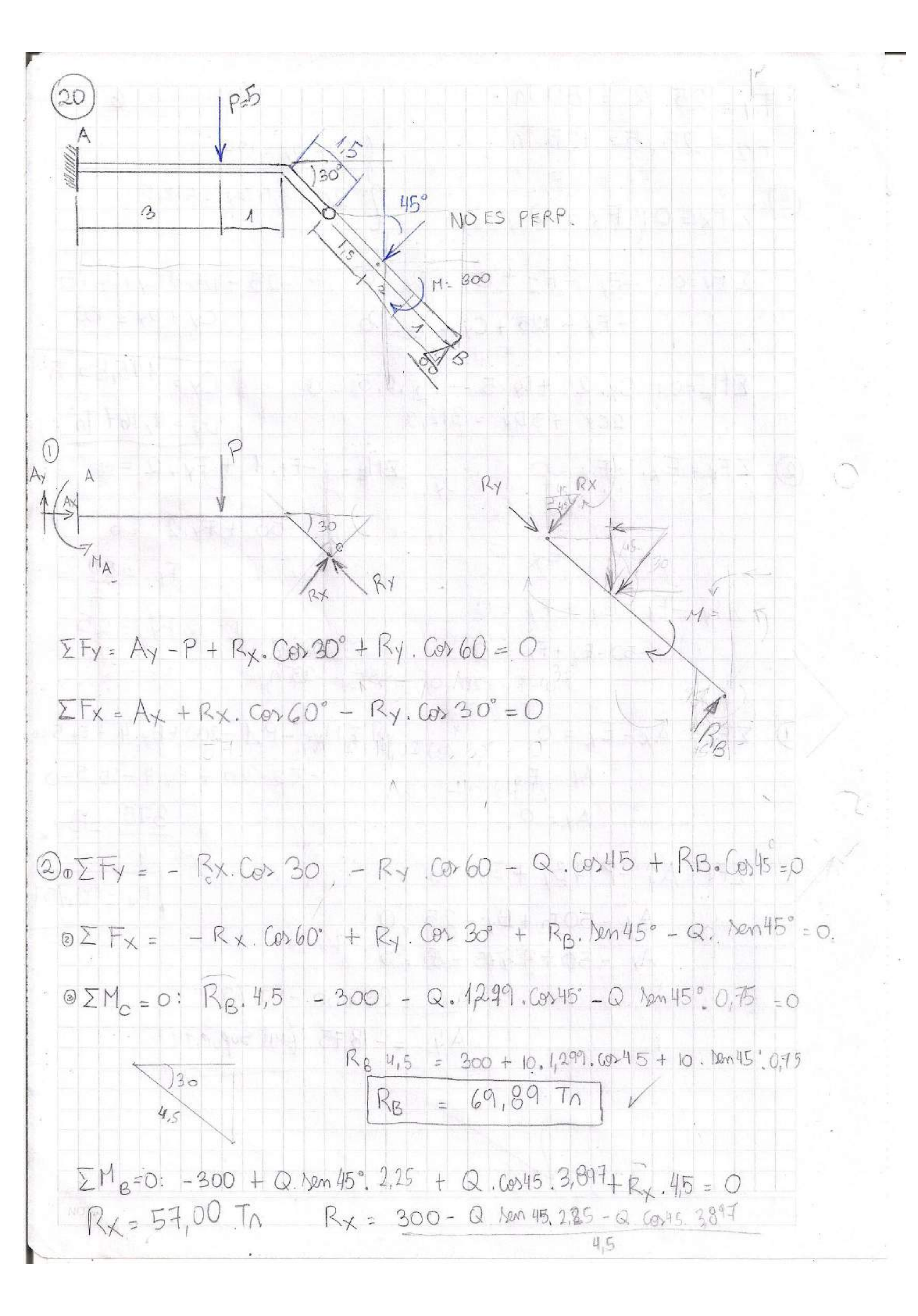
$Ay - 50Tn + By - 25 = 0$

$Ay - 50 + 93{,}75 - 25 = 0$

$Ay = 25 + 50 - 93{,}75$

$Ay = -18{,}75$ (MAL Supuesto)

NOTA



①

$$\Sigma Fy = A_y - P + R_x . \cos 30° + R_y . \cos 60 = 0$$

$$\Sigma Fx = A_x + R_x . \cos 60° - R_y . \cos 30° = 0$$

② ① $\Sigma Fy = - R_c x . \cos 30 - R_y . \cos 60 - Q . \cos 45 + R_B . \cos 45° = 0$

② $\Sigma F_x = - R_x . \cos 60° + R_y . \cos 30° + R_B . \operatorname{sen} 45° - Q . \operatorname{sen} 45° = 0.$

③ $\Sigma M_c = 0 : R_B . 4,5 - 300 - Q . 1,299 . \cos 45° - Q \operatorname{sen} 45° . 0,75 = 0$

$R_B \; 4,5 = 300 + 10 . 1,299 . \cos 45 + 10 . \operatorname{sen} 45° . 0,75$

$$\boxed{R_B = 69,89 \text{ Tn}}$$ ✓

$\Sigma M_B = 0 : -300 + Q . \operatorname{sen} 45° . 2,25 + Q . \cos 45 . 3,897 + R_x . 4,5 = 0$

$R_x = 57,00$ Tn $\quad R_x = \dfrac{300 - Q \operatorname{sen} 45 . 2,25 - Q \cos 45 . 3,897}{4,5}$

$\Sigma F_y = A_y - P + R_B \cdot \cos 30° - Q \cdot \cos 45° = 0$

$A_y = 5 - 69{,}89 \cdot \cos 30° + 10 \cos 45° = 0$

$A_y = -48{,}45\ Tn$

$\Sigma F_x = A_x - 10 \cos 45° + 69{,}89 \cdot \cos 30° =$

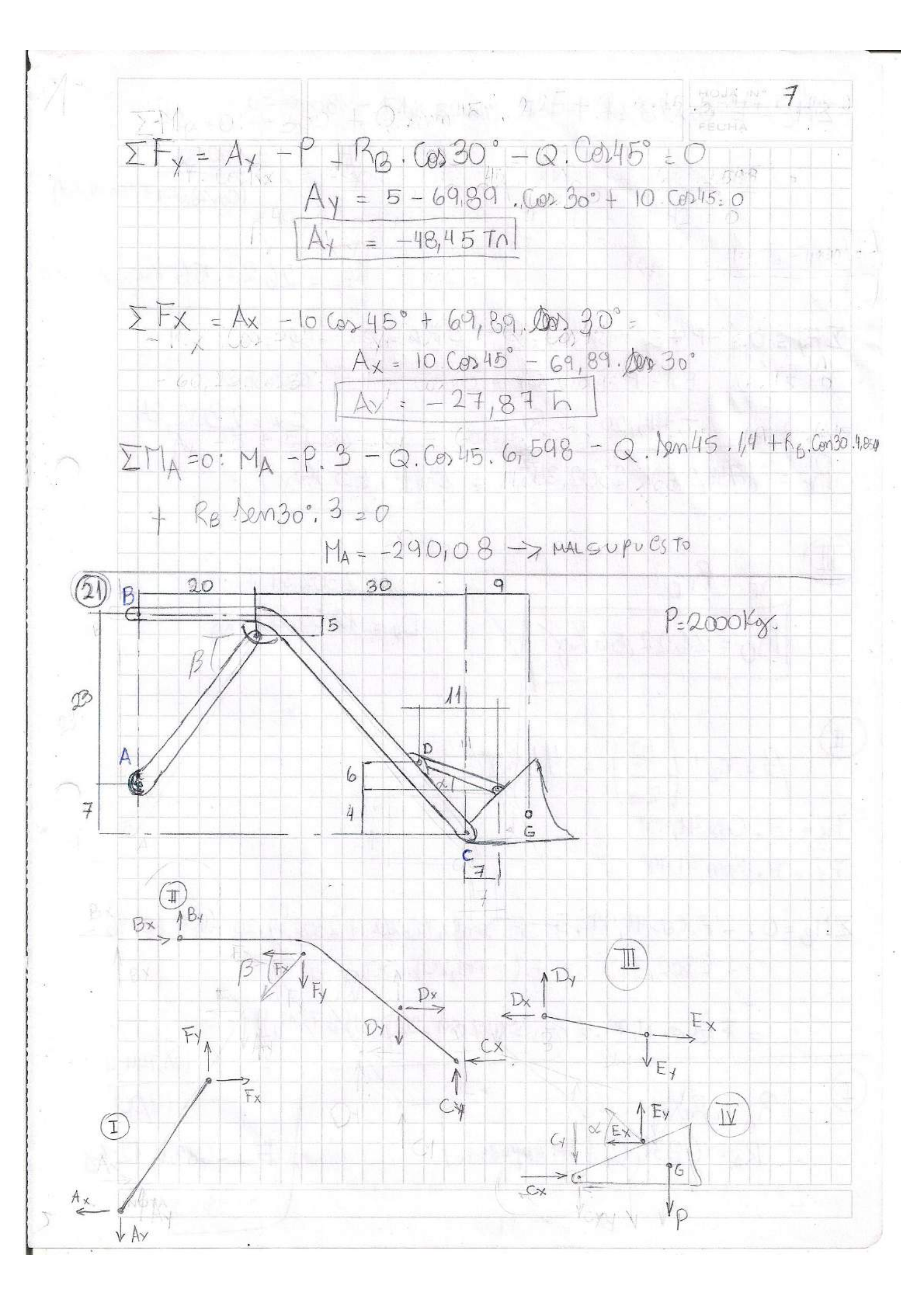
$A_x = 10 \cos 45° - 69{,}89 \cdot \cos 30°$

$A_x' = -27{,}87\ Tn$

$\Sigma M_A = 0: M_A - P \cdot 3 - Q \cdot \cos 45 \cdot 6{,}598 - Q \cdot \operatorname{sen} 45 \cdot 1{,}4 + R_B \cdot \cos 30 \cdot 4{,}850$

$+ R_B \operatorname{sen} 30° \cdot 3 = 0$

$M_A = -290{,}08$ → MAL SUPUESTO



$\Sigma M_C = E \cdot \cos 28{,}61 \cdot 4 + E \cdot \text{sen}\, 28{,}61 \cdot 7 - 18000 = 0$

$E = \dfrac{18000}{(\cos 28{,}61 \cdot 4 + \text{sen}\, 28{,}61 \cdot 7)}$

$R_E = 2622{,}56$ Kg ✓

$\Sigma F_y = 0: -P + E_y - C_y = 0$

$E_y - P = C_y$

$-744{,}20 = C_y$

$\Sigma F_x = C_x - E_x = 0$

$C_x = E_x$

$C_x = 2302{,}34$

$R_C = \sqrt{744{,}20^2 + 2302{,}34^2} = 2419{,}63$ Kg ✓

(III)

$R_E = R_D$

$R_D = 2622{,}56$ Kg ✓

$D_x = 2302{,}34$ Kg

$D_y = 1255{,}80$ Kg

(II)

$\beta = \text{Tg}^{-1}\left(\dfrac{18}{20}\right) = 41{,}99°$

$F_x = F \cdot \cos 41{,}99°$

$F_y = F \cdot \text{sen}\, 41{,}99°$

$\Sigma M_B = 0: -F \cdot \cos 41{,}99 \cdot 5 - F\, \text{sen}\, 41{,}99° \cdot 20 + 2302{,}34 \cdot 20 - 1255{,}80 \cdot 46$

$- 2302{,}34 \cdot 30 + (-744{,}20) \cdot 50 = 0$

$= F(-\cos 41{,}99 \cdot 5 - \text{sen}\, 41{,}99 \cdot 20) - 116744{,}4 = 0$

$F = \dfrac{116744{,}4}{-17{,}09}$

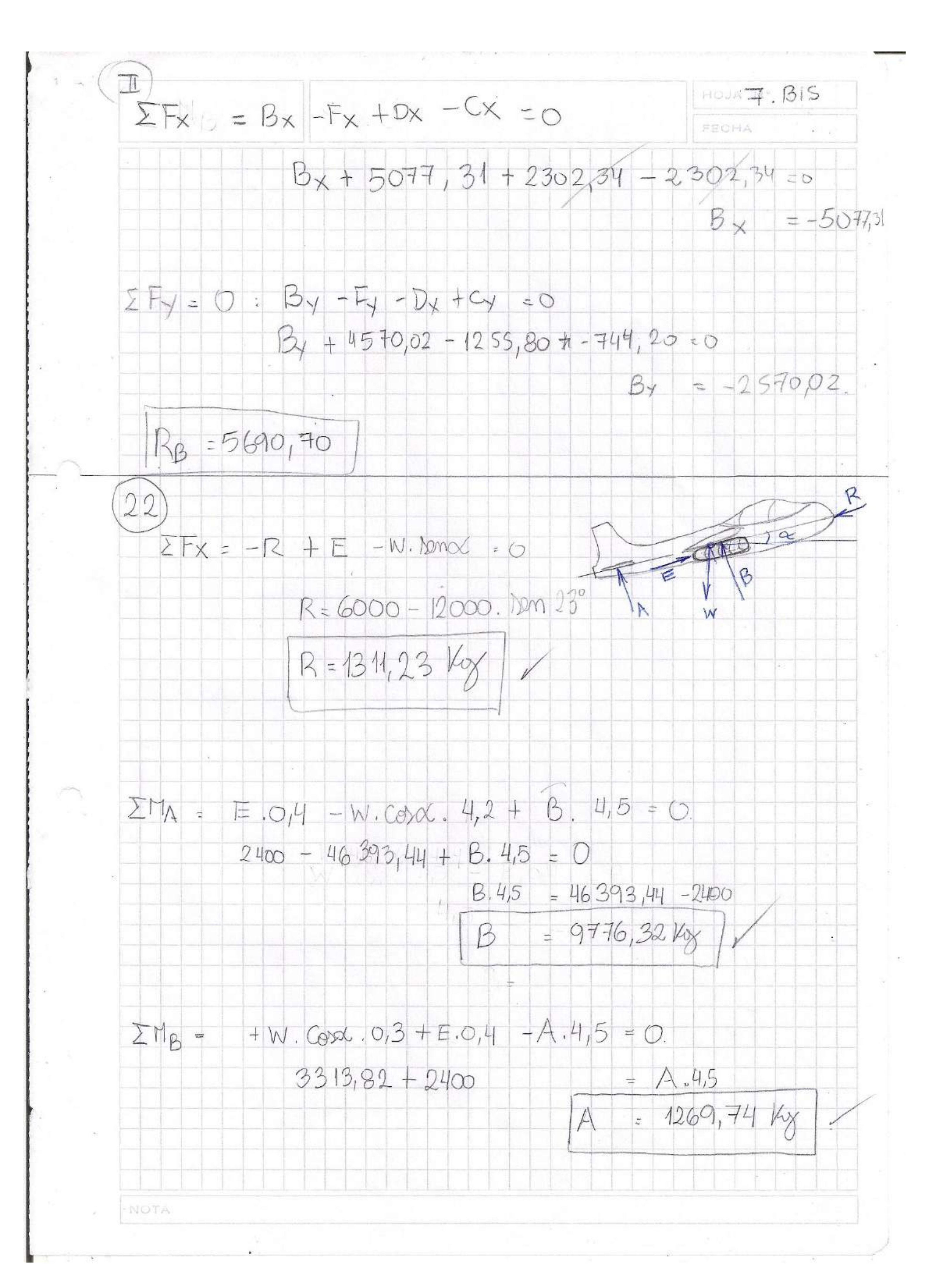
$F = -6831{,}12$ kg

$-4653{,}85$

(I)

$R_A = R_F$

$R_A = -6831{,}12$ (Mal supuesto)



(II)

$\Sigma F_x = B_x - F_x + D_x - C_x = 0$

$B_x + 5077,31 + 2302,34 - 2302,34 = 0$

$B_x = -5077,31$

$\Sigma F_y = 0 : B_y - F_y - D_x + C_y = 0$

$B_y + 4570,02 - 1255,80 + -744,20 = 0$

$B_y = -2570,02$

$R_B = 5690,70$

(22)

$\Sigma F_x = -R + E - W . \operatorname{sen}\alpha = 0$

$R = 6000 - 12000 . \operatorname{sen} 23°$

$R = 1311,23$ Kg ✓

$\Sigma M_A = E . 0,4 - W . \cos\alpha . 4,2 + B . 4,5 = 0$

$2400 - 46393,44 + B . 4,5 = 0$

$B . 4,5 = 46393,44 - 2400$

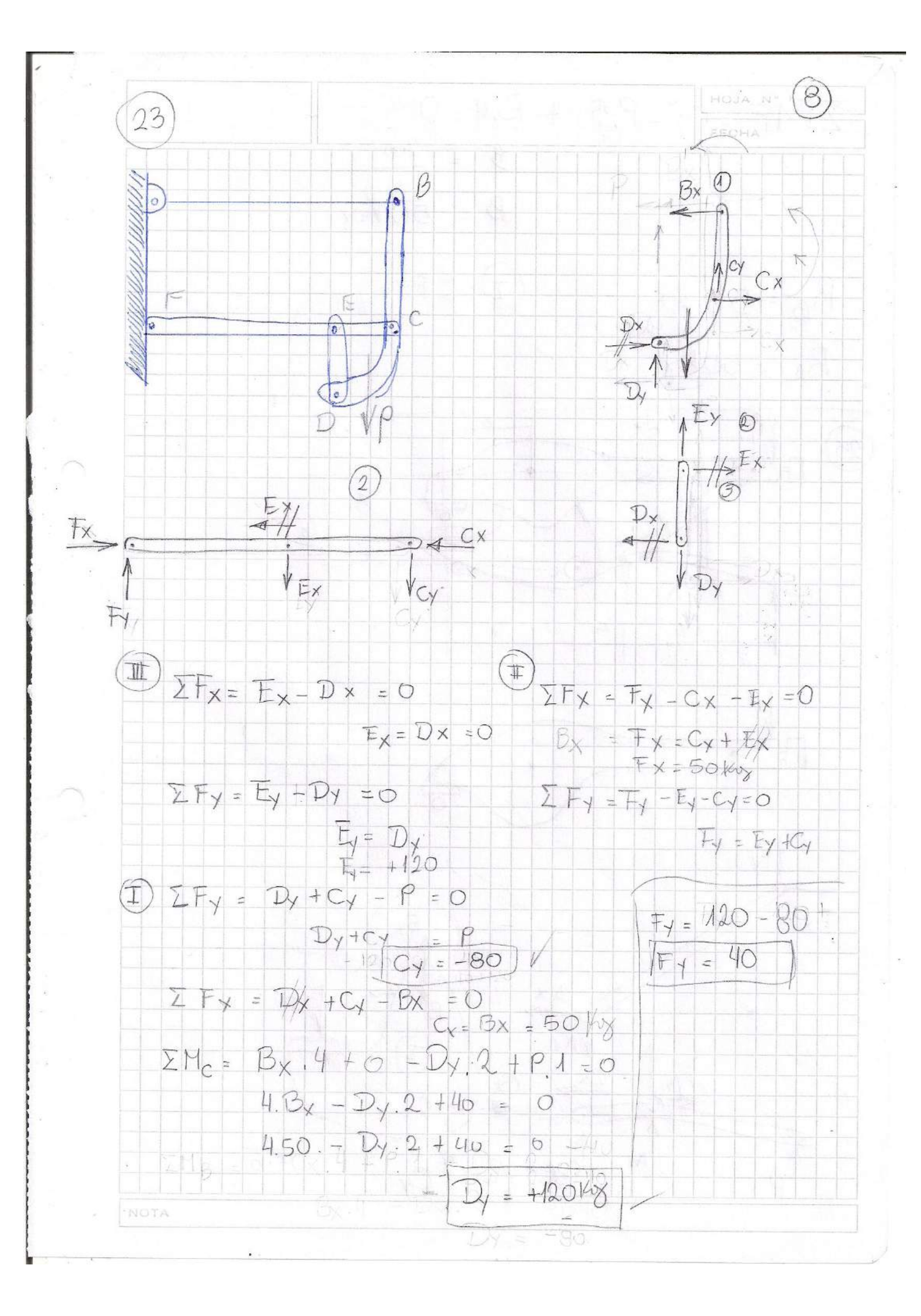
$B = 9776,32$ Kg ✓

$\Sigma M_B = + W . \cos\alpha . 0,3 + E . 0,4 - A . 4,5 = 0$

$3313,82 + 2400 = A . 4,5$

$A = 1269,74$ Kg ✓

NOTA



III

$\Sigma F_x = E_x - D_x = 0$

$E_x = D_x = 0$

$\Sigma F_y = E_y - D_y = 0$

$E_y = D_y$

$E_y = +120$

II

$\Sigma F_x = F_x - C_x - E_x = 0$

$F_x = C_x + E_x$

$F_x = 50\ kg$

$\Sigma F_y = F_y - E_y - C_y = 0$

$F_y = E_y + C_y$

$F_y = 120 - 80$

$\boxed{F_y = 40}$

I

$\Sigma F_y = D_y + C_y - P = 0$

$D_y + C_y = P$

$\boxed{C_y = -80}$

$\Sigma F_x = D_x + C_x - B_x = 0$

$C_x = B_x = 50\ kg$

$\Sigma M_C = B_x \cdot 4 + 0 - D_y \cdot 2 + P \cdot 1 = 0$

$4 \cdot B_x - D_y \cdot 2 + 40 = 0$

$4 \cdot 50 - D_y \cdot 2 + 40 = 0$

$\boxed{D_y = +120\ kg}$

NOTA

$\Sigma MF = 0: -P.5 + B.4 = 0$

$B = \frac{200}{4}$

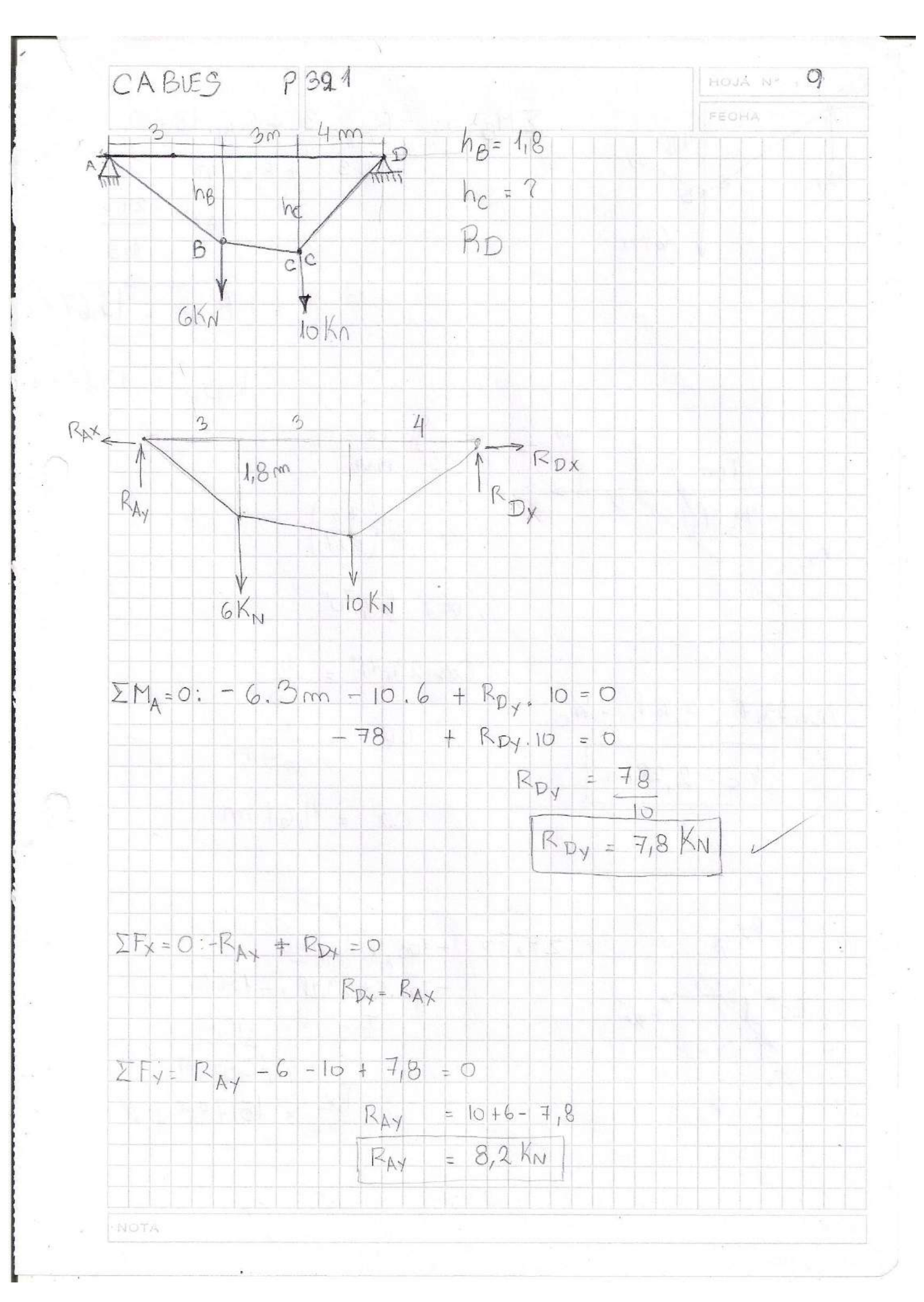
$B = 50 \, Kg$

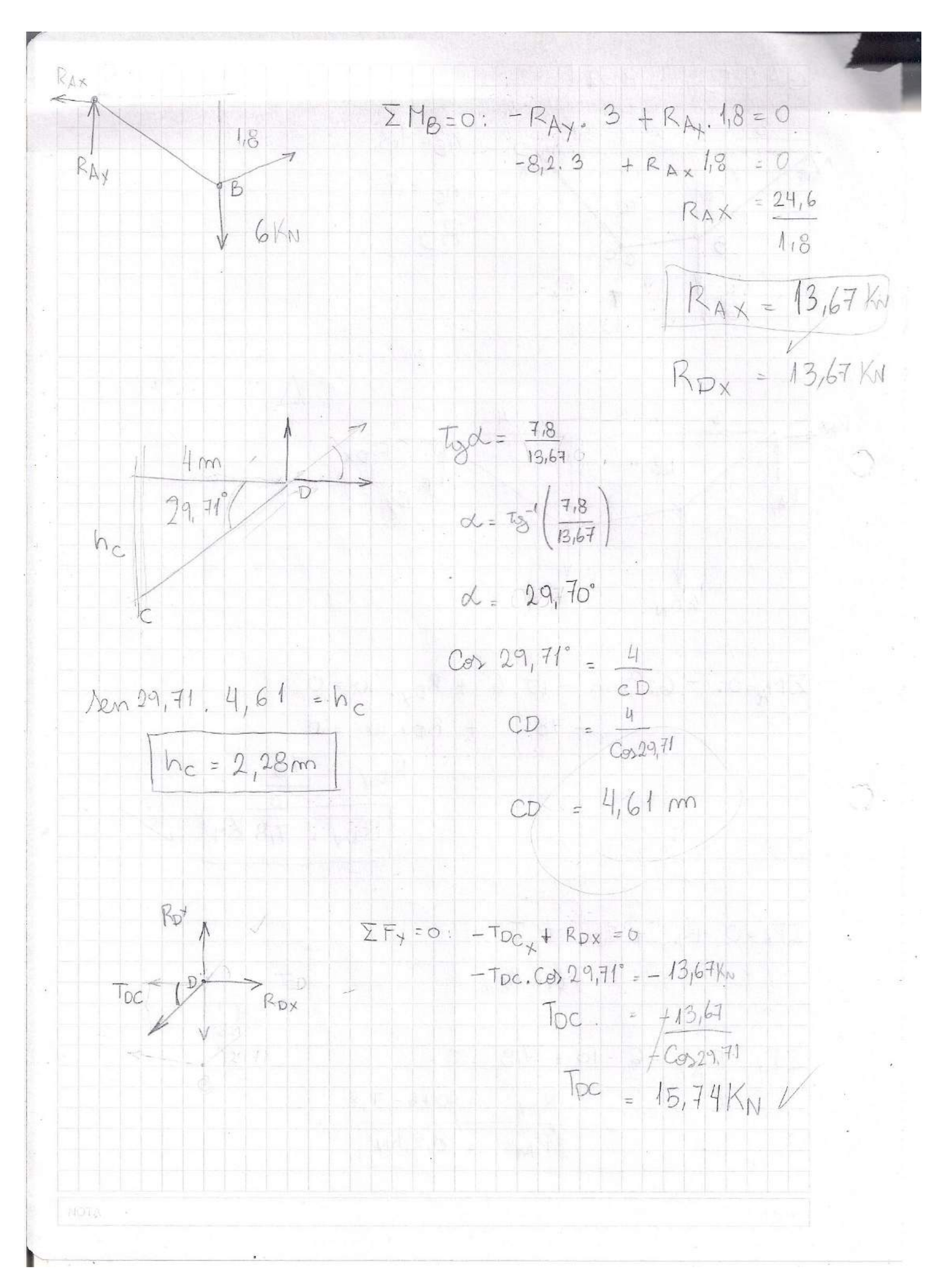
$R_B = 50 \, Kg$

(I) $\Sigma Fy =$

$R_A = 50 \, Kg$

(25)


CABLES P 321
HOJA Nº 9
FECHA
3
3m
4m
A
D
h_B
h_C
B
C
C
6 KN
10 Kn
$h_B = 1,8$
$h_C = ?$
R_D
R_{Ax}
3
3
4
1,8 m
R_{Ay}
R_{Dx}
R_{Dy}
6 KN
10 KN
$\Sigma M_A = 0: -6.3m - 10.6 + R_{Dy}.10 = 0$
$-78 + R_{Dy}.10 = 0$
$R_{Dy} = \frac{78}{10}$
$R_{Dy} = 7,8$ KN
$\Sigma F_x = 0: -R_{Ax} + R_{Dx} = 0$
$R_{Dx} = R_{Ax}$
$\Sigma F_y = R_{Ay} - 6 - 10 + 7,8 = 0$
$R_{Ay} = 10 + 6 - 7,8$
$R_{Ay} = 8,2$ KN
NOTA



R_{Ax}
R_{Ay}
1,8
B
6 KN

$$\Sigma M_B = 0: \; -R_{Ay} \cdot 3 + R_{Ax} \cdot 1{,}8 = 0$$
$$-8{,}2 \cdot 3 + R_{Ax}\, 1{,}8 = 0$$
$$R_{Ax} = \frac{24{,}6}{1{,}8}$$
$$R_{Ax} = 13{,}67 \text{ KN}$$
$$R_{Dx} = 13{,}67 \text{ KN}$$

4 m
29,71°
D
h_c
C

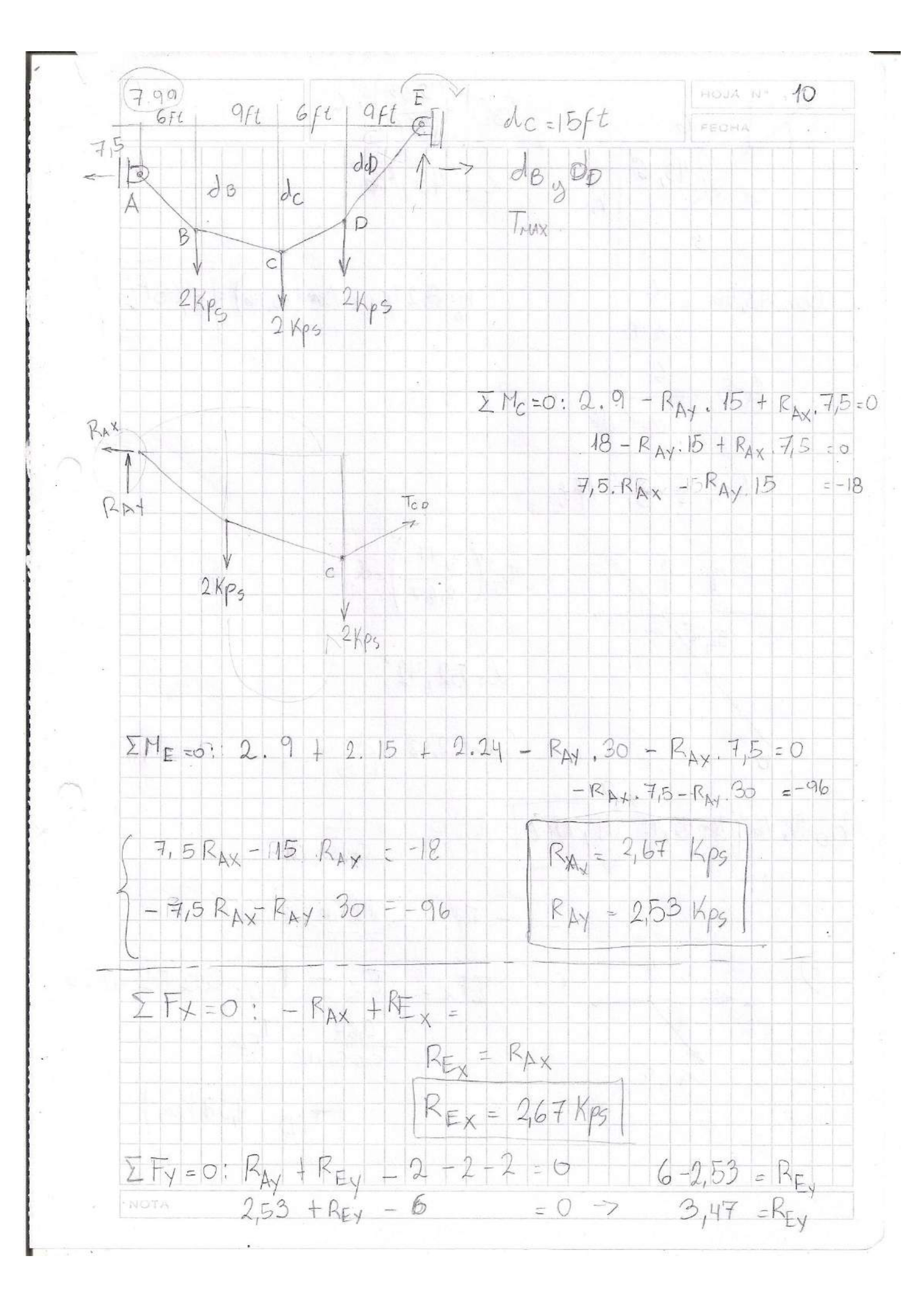
$$Tg\,\alpha = \frac{7{,}8}{13{,}67}$$
$$\alpha = Tg^{-1}\left(\frac{7{,}8}{13{,}67}\right)$$
$$\alpha = 29{,}70°$$
$$\cos 29{,}71° = \frac{4}{CD}$$
$$CD = \frac{4}{\cos 29{,}71}$$
$$CD = 4{,}61 \text{ m}$$

$$\text{sen } 29{,}71 \cdot 4{,}61 = h_c$$
$$h_c = 2{,}28 \text{ m}$$

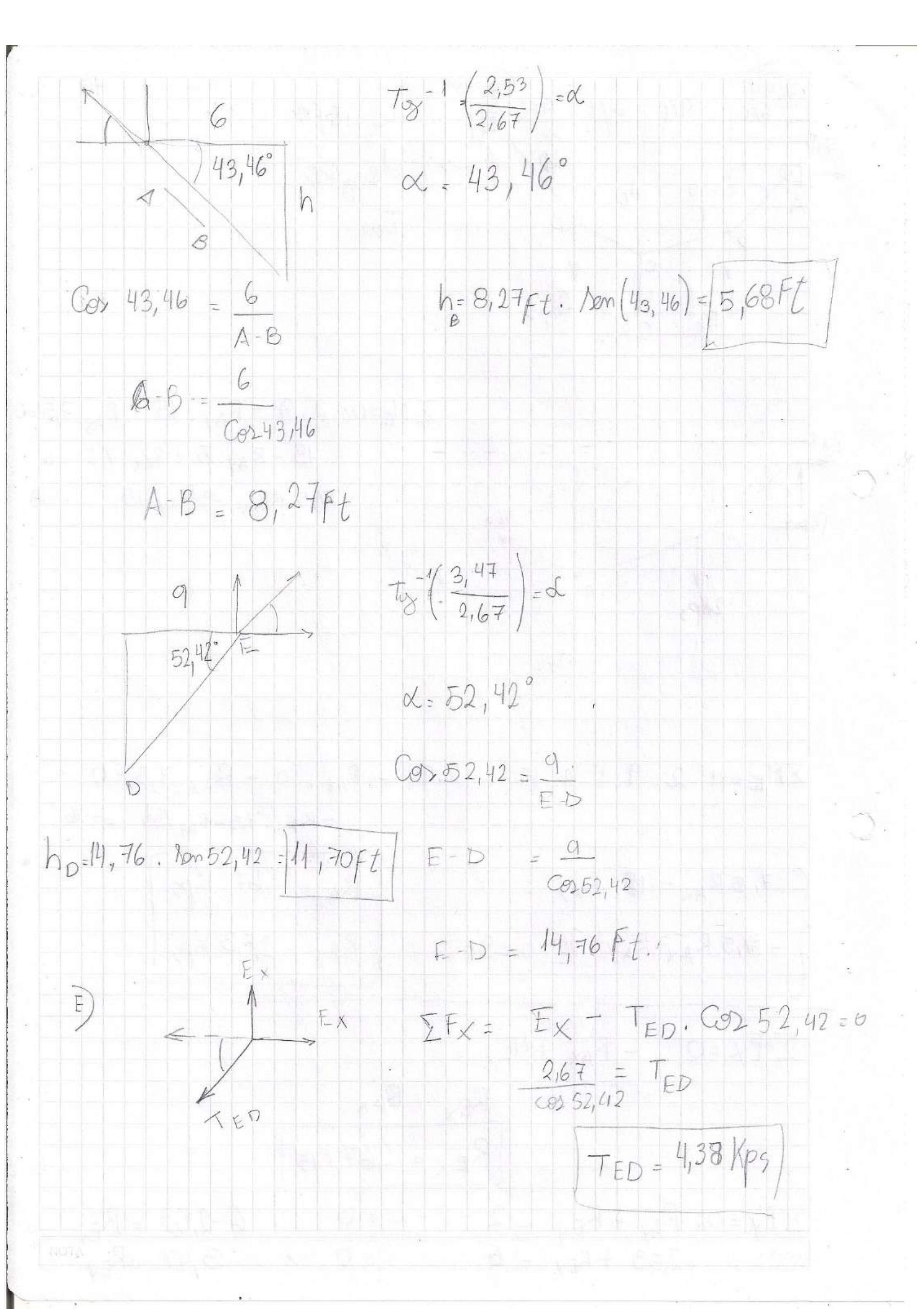
R_{Dy}
T_{DC}
D
R_{Dx}

$$\Sigma F_y = 0: \; -T_{DC_x} + R_{Dx} = 0$$
$$-T_{DC} \cdot \cos 29{,}71° = -13{,}67 \text{ KN}$$
$$T_{DC} = \frac{+13{,}67}{+\cos 29{,}71}$$
$$T_{DC} = 15{,}74 \text{ KN}$$

NOTA



HOJA N° 10
FECHA
NOTA
7.99
6ft 9ft 6ft 9ft
7,5
A B C D E
dB dc dD
2Kps 2Kps 2Kps
dc = 15ft
dB y dD
TMAX
RAx RAy TCD
2Kps 2Kps
ΣMc = 0: 2 . 9 − RAy . 15 + RAx . 7,5 = 0
18 − RAy . 15 + RAx . 7,5 = 0
7,5 . RAx − RAy . 15 = −18
ΣME = 0: 2 . 9 + 2 . 15 + 2 . 24 − RAy . 30 − RAx . 7,5 = 0
− RAx . 7,5 − RAy . 30 = −96
7,5 RAx − 15 RAy = −18
− 7,5 RAx − RAy . 30 = −96
RAx = 2,67 Kps
RAy = 2,53 Kps
ΣFx = 0 : − RAx + REx =
REx = RAx
REx = 2,67 Kps
ΣFy = 0 : RAy + REy − 2 − 2 − 2 = 0
2,53 + REy − 6 = 0 →
6 − 2,53 = REy
3,47 = REy



$Tg^{-1}\left(\frac{2,53}{2,67}\right) = \alpha$

$\alpha = 43,46°$

$\cos 43,46 = \frac{6}{A-B}$

$h_B = 8,27\,ft \cdot \operatorname{sen}(43,46) = 5,68\,ft$

$A-B = \frac{6}{\cos 43,46}$

$A-B = 8,27\,ft$

$Tg^{-1}\left(\frac{3,47}{2,67}\right) = \alpha$

$\alpha = 52,42°$

$\cos 52,42 = \frac{9}{E-D}$

$h_D = 14,76 \cdot \operatorname{sen} 52,42 = 11,70\,ft$

$E-D = \frac{9}{\cos 52,42}$

$E-D = 14,76\,ft$

E)

$\Sigma F_x = E_x - T_{ED} \cdot \cos 52,42 = 0$

$\frac{2,67}{\cos 52,42} = T_{ED}$

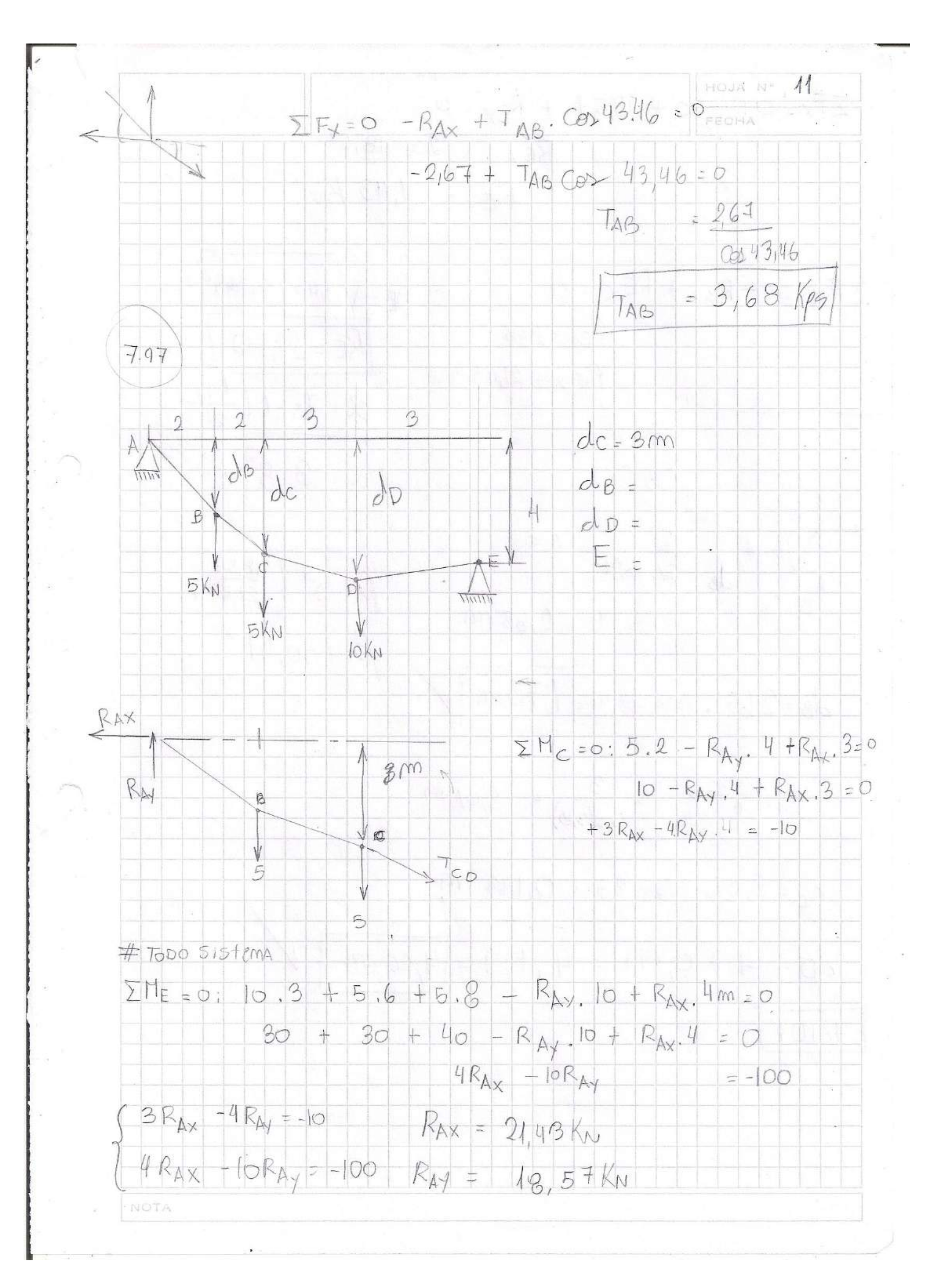
$T_{ED} = 4,38\,Kps$

$\Sigma F_x = 0 \quad -R_{Ax} + T_{AB} \cdot \cos 43.46 = 0$

$-2{,}67 + T_{AB} \cos 43{,}46 = 0$

$T_{AB} = \dfrac{2{,}67}{\cos 43{,}46}$

$\boxed{T_{AB} = 3{,}68 \text{ Kps}}$



$d_C = 3m$

$d_B =$

$d_D =$

$E =$

$\Sigma M_C = 0: 5.2 - R_{Ay}.4 + R_{Ax}.3 = 0$

$10 - R_{Ay}.4 + R_{Ax}.3 = 0$

$+3R_{Ax} - 4R_{Ay} = -10$

\# TODO SISTEMA

$\Sigma M_E = 0;\ 10.3 + 5.6 + 5.8 - R_{Ay}.10 + R_{Ax}.4m = 0$

$30 + 30 + 40 - R_{Ay}.10 + R_{Ax}.4 = 0$

$4R_{Ax} - 10R_{Ay} = -100$

$\begin{cases} 3R_{Ax} - 4R_{Ay} = -10 \\ 4R_{Ax} - 10R_{Ay} = -100 \end{cases}$

$R_{Ax} = 21{,}43 \text{ KN}$

$R_{Ay} = 18{,}57 \text{ KN}$

NOTA

$\Sigma F_Y = 0: \; -20 + 18{,}57 + R_{EY} = 0$

$R_{EY} = 20 - 18{,}57$

$R_{EY} = 1{,}43 \text{ KN}$

$\Sigma F_X = 0: -R_{AX} + R_{EX} = 0$

$R_{EX} = R_{AX}$

$R_{EX} = 21{,}43 \text{ KN}$

$R_E = \sqrt{1{,}43^2 + 21{,}43^2}$

$R_E = 21{,}50$

$\alpha = Tg^{-1}\left(\frac{1{,}43}{21{,}43}\right)$

$\alpha = 3{,}8°$

2

40,91

A

B

d_B

$\frac{2}{\cos 40{,}91} = A-B$

$A-B = 2{,}65 \text{ m}$

$\beta = tg^{-1}\left(\frac{18{,}57}{21{,}43}\right)$

$\beta = 40{,}91°$

$d_B = 2{,}65 \cdot \text{sen } 40{,}91 = 1{,}73 \text{ m}$

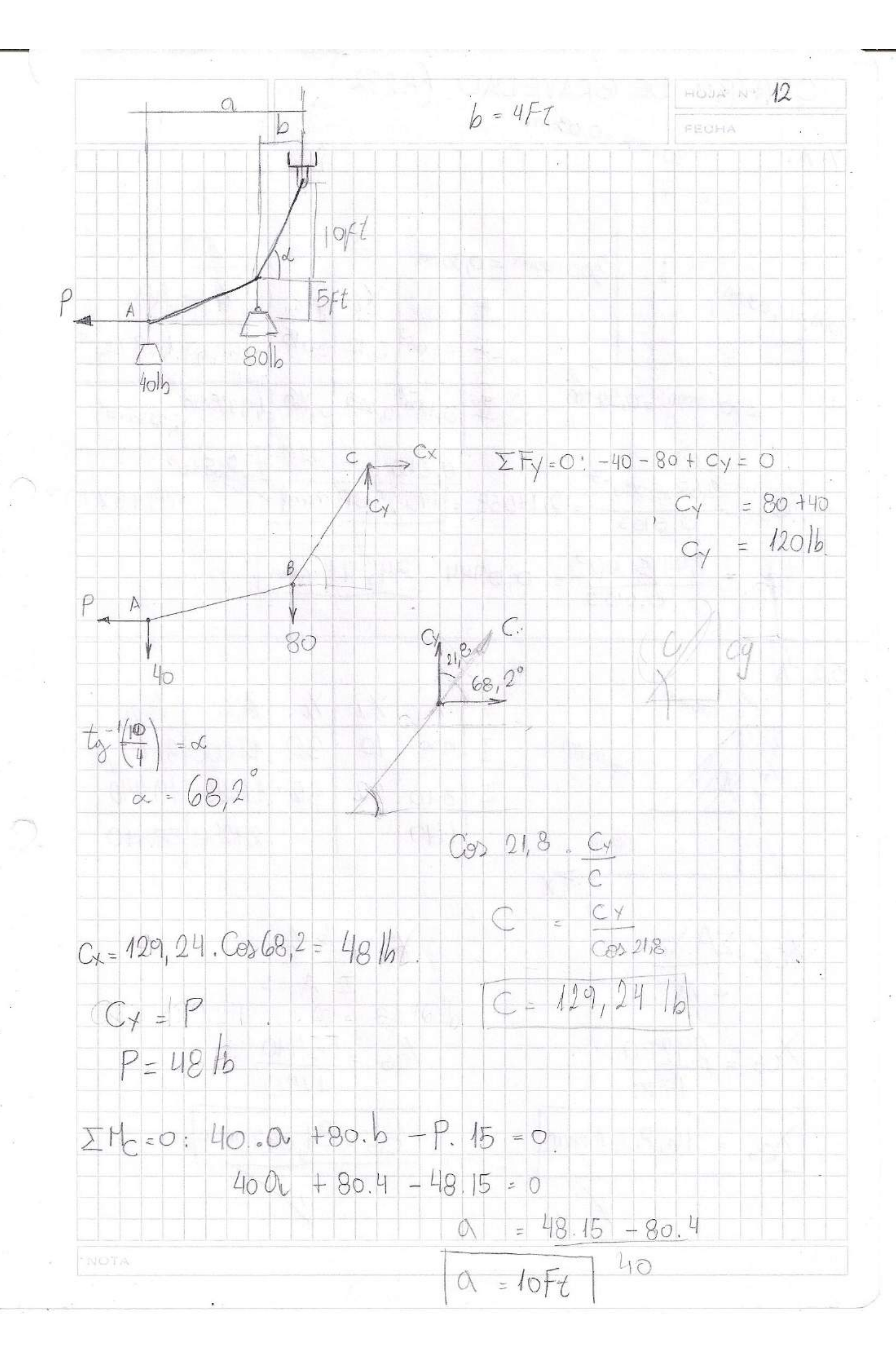
$\frac{3}{\cos(3{,}8)} = 3{,}01 \text{ m}$

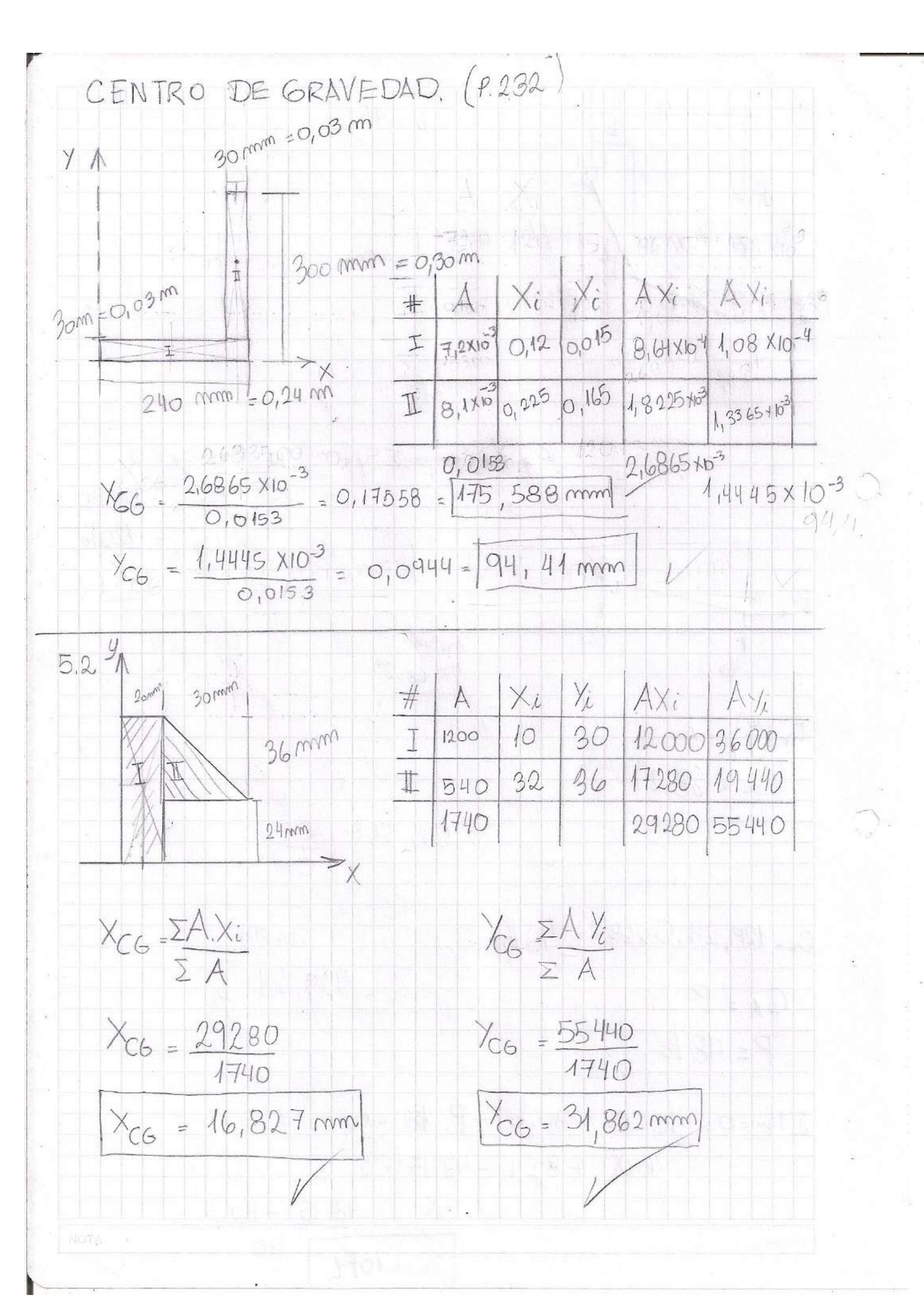
$h_D = 3{,}01 \cdot \text{sen } 3{,}8 = 0{,}199 \text{ m}$

$d_D = 4 + 0{,}199 = 4{,}199 = 4{,}20 \text{ m}$

7.101

NOTA


HOJA Nº 12
FECHA
b = 4Ft
a
b
10Ft
α
5Ft
P
A
80lb
40lb
C
Cx
Cy
B
P
A
80
40
ΣFy = 0: -40 - 80 + Cy = 0
Cy = 80 + 40
Cy = 120lb
Cy
21,8
C
68,2°
tg⁻¹(10/4) = α
α = 68,2°
Cos 21,8 = Cy / C
C = Cy / Cos 21,8
C = 129,24 lb
Cx = 129,24 . Cos 68,2 = 48 lb
Cx = P
P = 48 lb
ΣMC = 0: 40.a + 80.b - P.15 = 0
40a + 80.4 - 48.15 = 0
a = (48.15 - 80.4) / 40
NOTA
a = 10Ft



CENTRO DE GRAVEDAD. (P. 232)

#	A	X_i	Y_i	AX_i	AY_i
I	$7,2 \times 10^{-3}$	0,12	0,015	$8,64 \times 10^{-4}$	$1,08 \times 10^{-4}$
II	$8,1 \times 10^{-3}$	0,225	0,165	$1,8225 \times 10^{-3}$	$1,3365 \times 10^{-3}$
	0,0153			$2,6865 \times 10^{-3}$	$1,4445 \times 10^{-3}$

$$X_{CG} = \frac{2,6865 \times 10^{-3}}{0,0153} = 0,17558 = \boxed{175,588 \text{ mm}}$$

$$Y_{CG} = \frac{1,4445 \times 10^{-3}}{0,0153} = 0,0944 = \boxed{94,41 \text{ mm}}$$

5.2

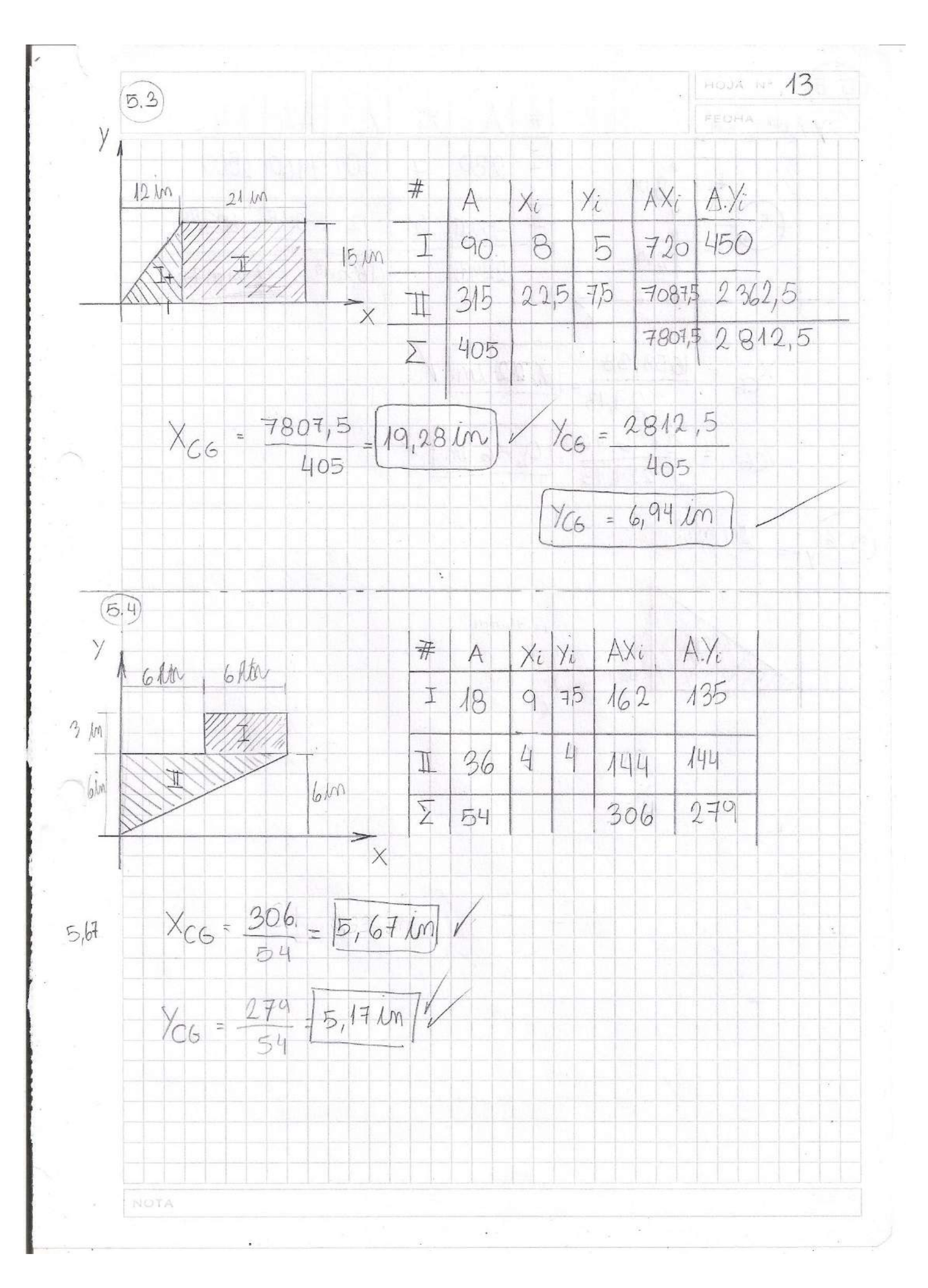
#	A	X_i	Y_i	AX_i	AY_i
I	1200	10	30	12000	36000
II	540	32	36	17280	19440
	1740			29280	55440

$$X_{CG} = \frac{\Sigma A.X_i}{\Sigma A} \qquad Y_{CG} = \frac{\Sigma A\, Y_i}{\Sigma A}$$

$$X_{CG} = \frac{29280}{1740} \qquad Y_{CG} = \frac{55440}{1740}$$

$$\boxed{X_{CG} = 16,827 \text{ mm}} \qquad \boxed{Y_{CG} = 31,862 \text{ mm}}$$

NOTA



HOJA N° 13

FECHA

(5.3)

#	A	X_i	Y_i	AX_i	$A.Y_i$
I	90	8	5	720	450
II	315	22,5	7,5	7087,5	2 362,5
Σ	405			7807,5	2 812,5

$$X_{CG} = \frac{7807,5}{405} = \boxed{19,28\ in}$$

$$Y_{CG} = \frac{2812,5}{405}$$

$$\boxed{Y_{CG} = 6,94\ in}$$

(5.4)

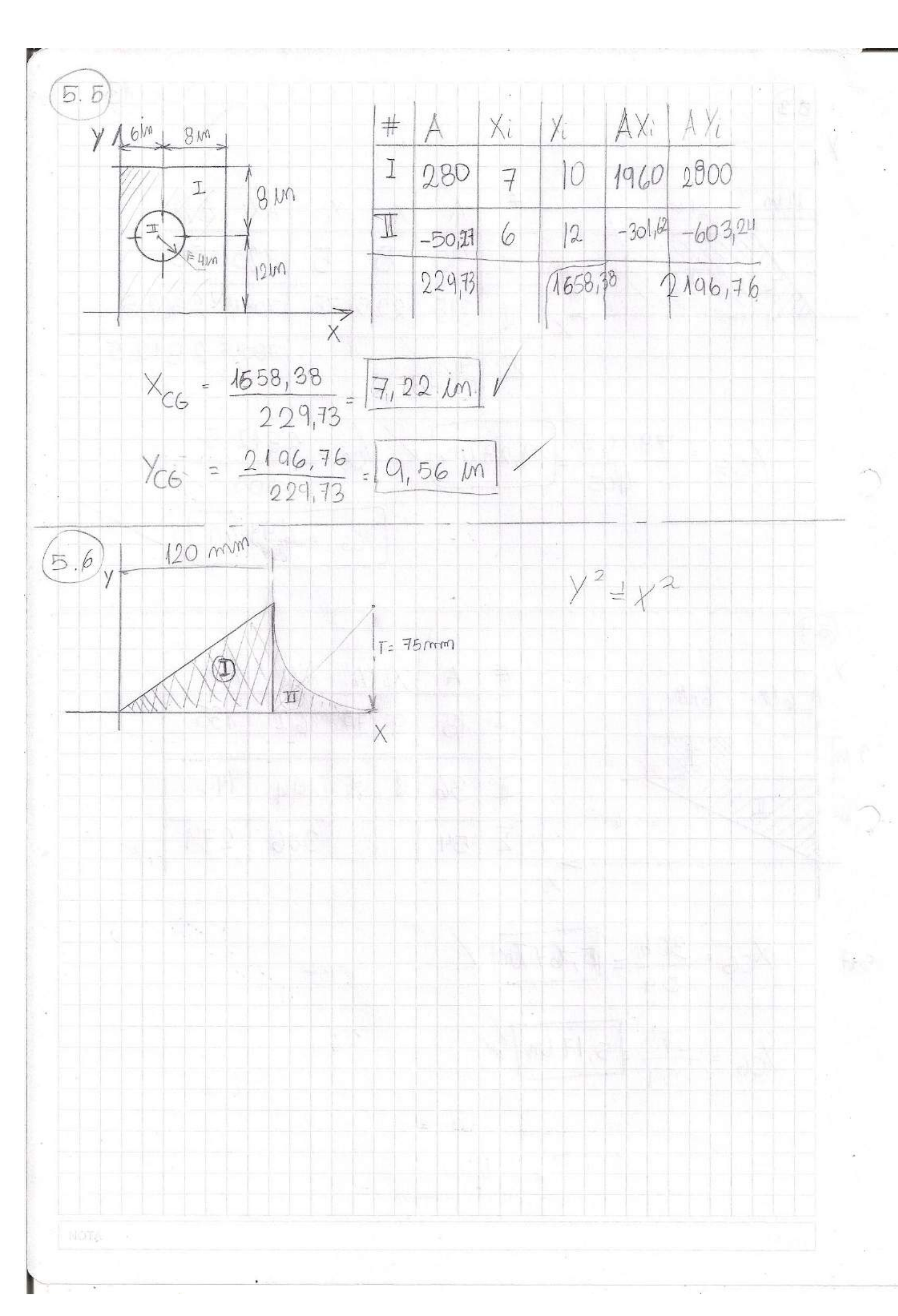
#	A	X_i	Y_i	AX_i	$A.Y_i$
I	18	9	7,5	162	135
II	36	4	4	144	144
Σ	54			306	279

5,67

$$X_{CG} = \frac{306}{54} = \boxed{5,67\ in}$$

$$Y_{CG} = \frac{279}{54} = \boxed{5,17\ in}$$

NOTA



5.5

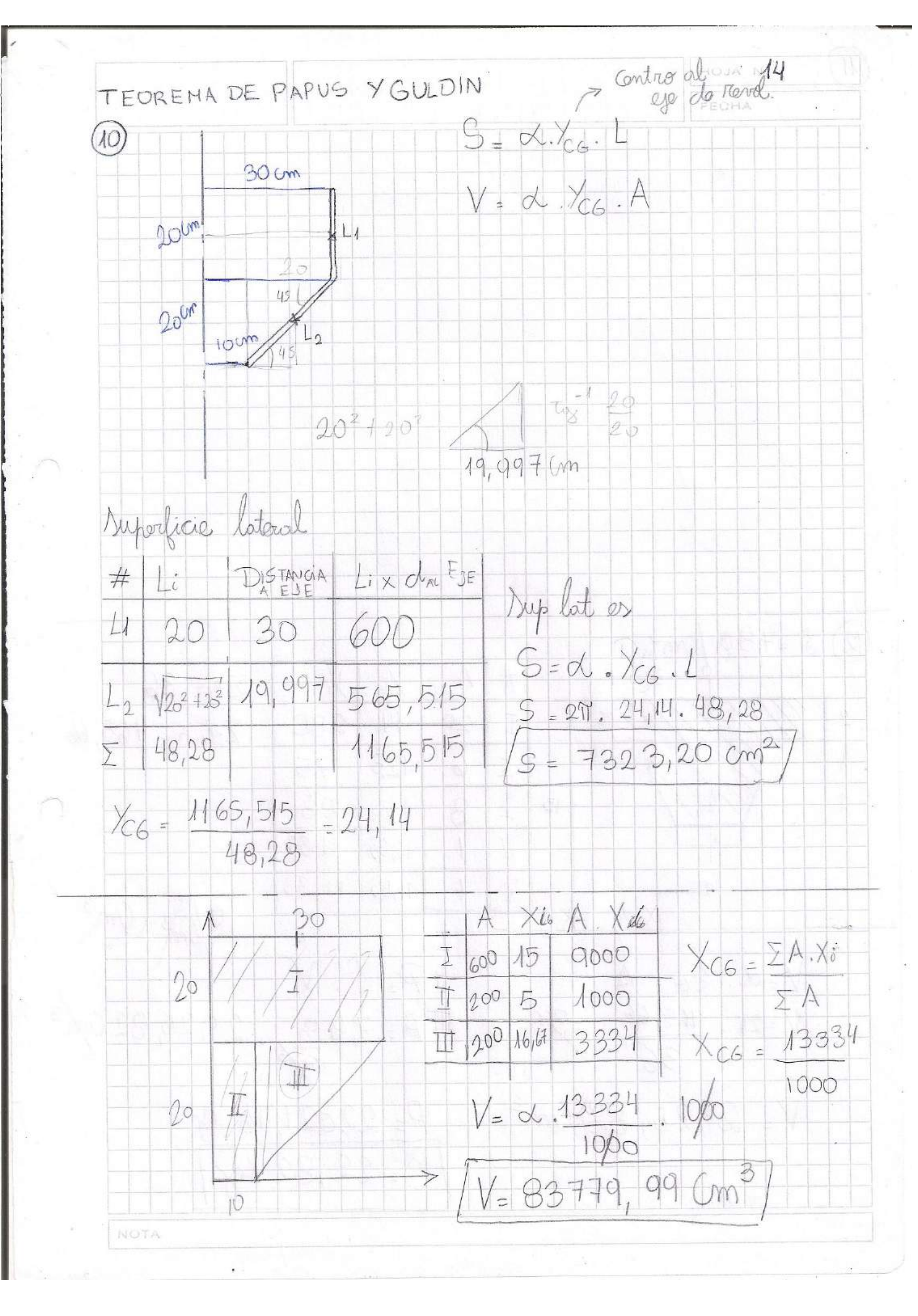
#	A	Xi	Yi	AXi	AYi
I	280	7	10	1960	2800
II	-50,27	6	12	-301,62	-603,24
	229,73			1658,38	2196,76

$$X_{CG} = \frac{1658,38}{229,73} = \boxed{7,22\ in}$$

$$Y_{CG} = \frac{2196,76}{229,73} = \boxed{9,56\ in}$$

5.6

$y^2 = x^2$



TEOREMA DE PAPUS Y GULDIN

HOJA Nº 14

→ Centro al eje de revol.

(10)

$S = \alpha . Y_{CG} . L$

$V = \alpha . Y_{CG} . A$

Superficie lateral

#	Li	DISTANCIA A EJE	Li x d AL EJE
L1	20	30	600
L2	$\sqrt{20^2+20^2}$	19,997	565,515
Σ	48,28		1165,515

Sup lat es

$S = \alpha . Y_{CG} . L$

$S = 2\pi . 24,14 . 48,28$

$S = 7323,20 \text{ cm}^2$

$Y_{CG} = \frac{1165,515}{48,28} = 24,14$

	A	Xi	A . Xi
I	600	15	9000
II	200	5	1000
III	200	16,67	3334

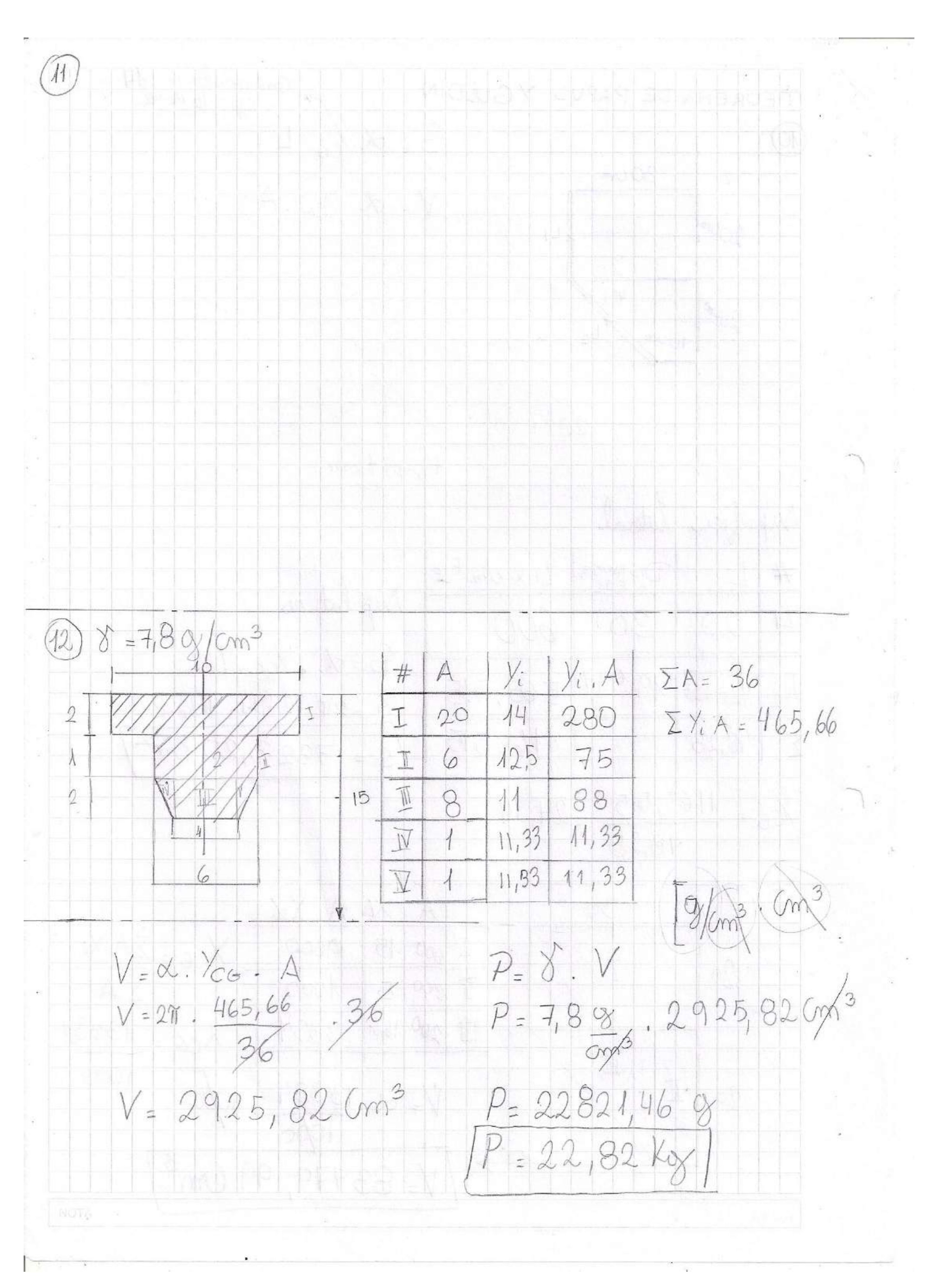
$X_{CG} = \frac{\Sigma A . X_i}{\Sigma A}$

$X_{CG} = \frac{13334}{1000}$

$V = \alpha . \frac{13334}{1000} . 1000$

$V = 83779,99 \text{ Cm}^3$

NOTA



(11)

(12) $\gamma = 7,8\ g/cm^3$

#	A	Y_i	$Y_i \cdot A$
I	20	14	280
II	6	12,5	75
III	8	11	88
IV	1	11,33	11,33
V	1	11,33	11,33

$\Sigma A = 36$

$\Sigma Y_i A = 465,66$

$[g/cm^3 \cdot cm^3]$

$V = \alpha \cdot Y_{CG} \cdot A$

$V = 2\pi \cdot \frac{465,66}{36} \cdot 36$

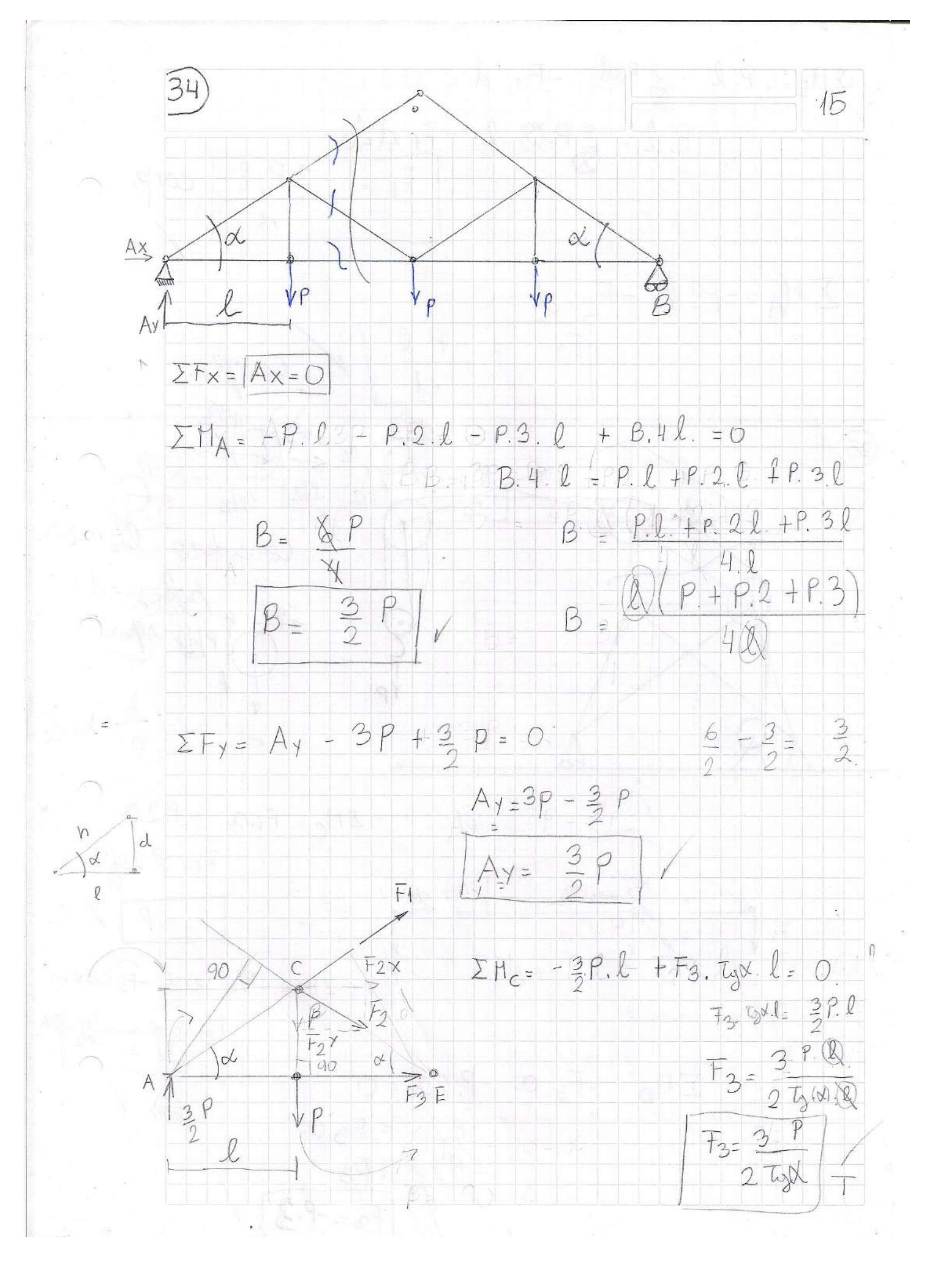
$V = 2925,82\ cm^3$

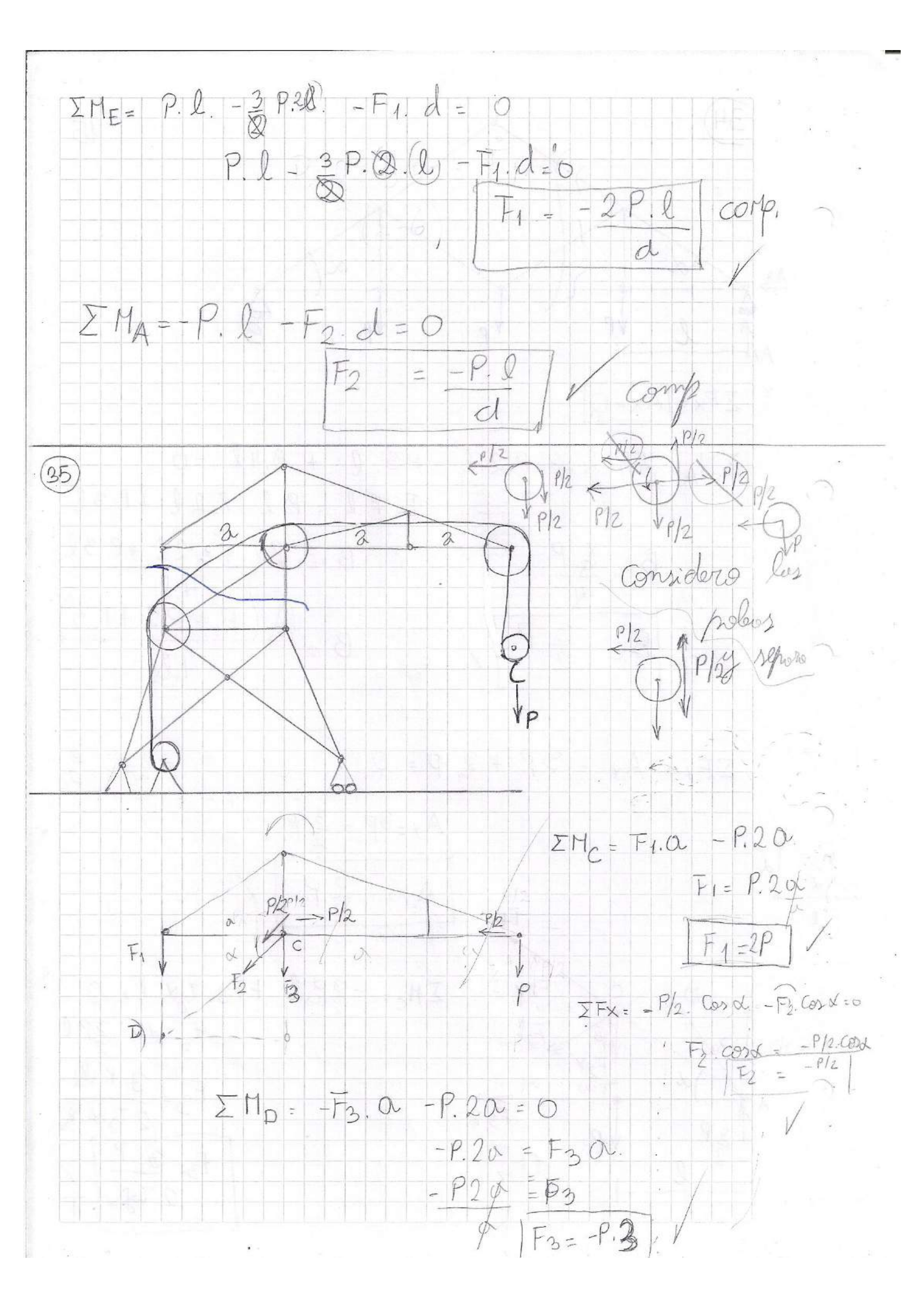
$P = \gamma \cdot V$

$P = 7,8\ \frac{g}{cm^3} \cdot 2925,82\ cm^3$

$P = 22821,46\ g$

$P = 22,82\ Kg$


34
15
α
α
Ax
Ay
l
P
P
P
B
ΣFx = Ax = 0
ΣM_A = -P.l - P.2.l - P.3.l + B.4l. = 0
B.4.l = P.l + P.2.l + P.3.l
B = 6P/4
B = 3/2 P
B = (P.l + P.2l + P.3l)/4.l
B = l(P + P.2 + P.3)/4l
ΣFy = Ay - 3P + 3/2 P = 0
6/2 - 3/2 = 3/2
Ay = 3P - 3/2 P
Ay = 3/2 P
h
d
α
l
F1
90
C
F2x
F2
β
F2y
α
90
α
A
F3
E
3/2 P
P
l
ΣM_C = -3/2 P.l + F3.Tgα.l = 0
F3.Tgα.l = 3/2 P.l
F3 = 3 P.l / 2 Tg(α).l
F3 = 3 P / 2 Tgα
T



$\Sigma M_E = P \cdot l - \frac{3}{2} P \cdot 2l - F_1 \cdot d = 0$

$P \cdot l - \frac{3}{2} P \cdot 2 \cdot l - F_1 \cdot d = 0$

$\boxed{F_1 = \frac{-2P \cdot l}{d}}$ comp.

$\Sigma M_A = -P \cdot l - F_2 \cdot d = 0$

$\boxed{F_2 = \frac{-P \cdot l}{d}}$ comp

(35)

$\Sigma M_C = F_1 \cdot a - P \cdot 2a$

$F_1 = P \cdot 2a/a$

$\boxed{F_1 = 2P}$

$\Sigma F_x = -P/2 \cdot \cos\alpha - F_2 \cdot \cos\alpha = 0$

$F_2 \cdot \cos\alpha = -P/2 \cdot \cos\alpha$

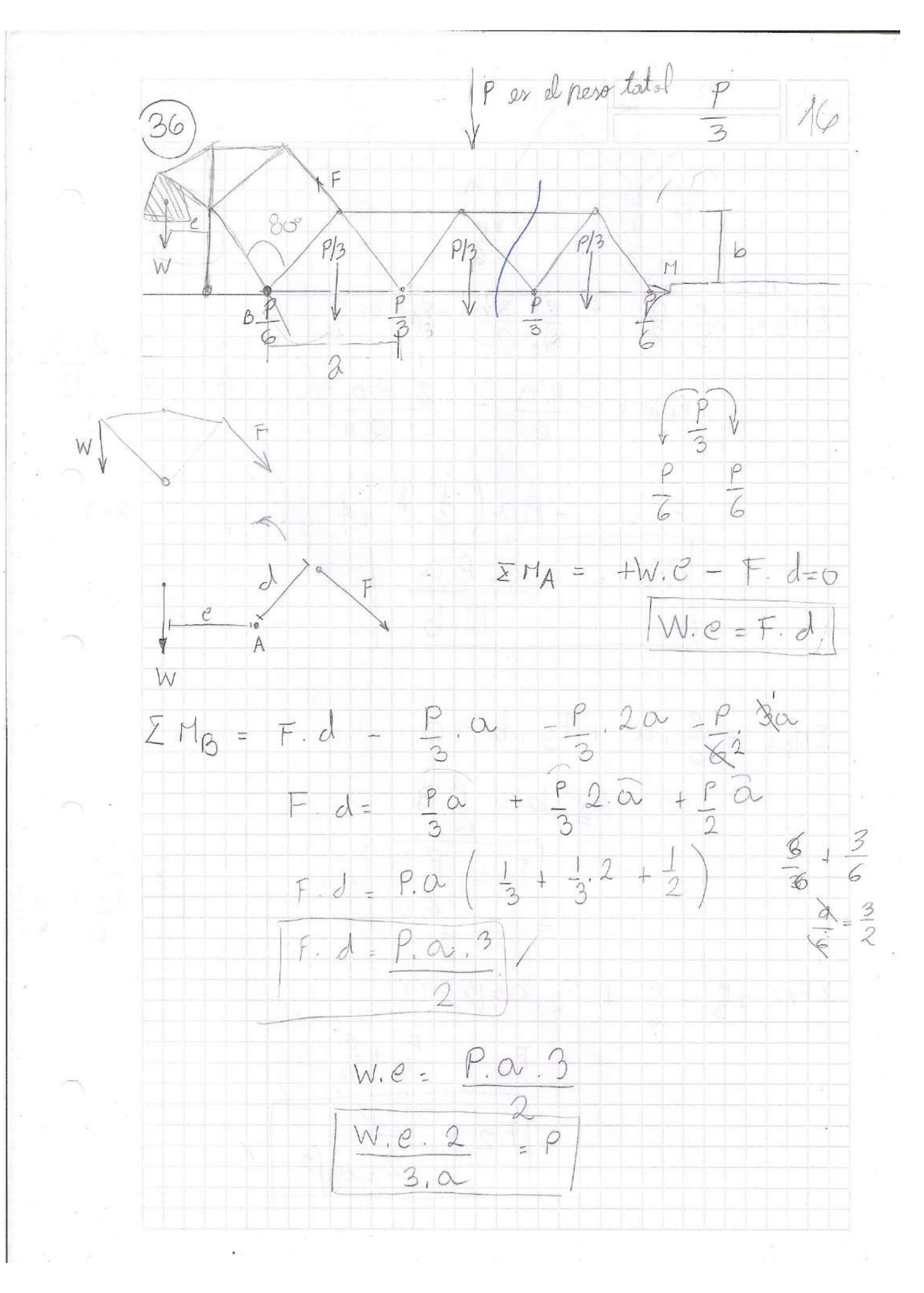
$\boxed{F_2 = -P/2}$

$\Sigma M_D = -F_3 \cdot a - P \cdot 2a = 0$

$-P \cdot 2a = F_3 \, a$

$\frac{-P\,2a}{a} = F_3$

$\boxed{F_3 = -P \cdot 2}$



$$\Sigma M_A = +W.e - F.d = 0$$

$$\boxed{W.e = F.d}$$

$$\Sigma M_B = F.d - \frac{P}{3}.a - \frac{P}{3}.2a - \frac{P}{6}.3a$$

$$F.d = \frac{P}{3}a + \frac{P}{3}2.a + \frac{P}{2}a$$

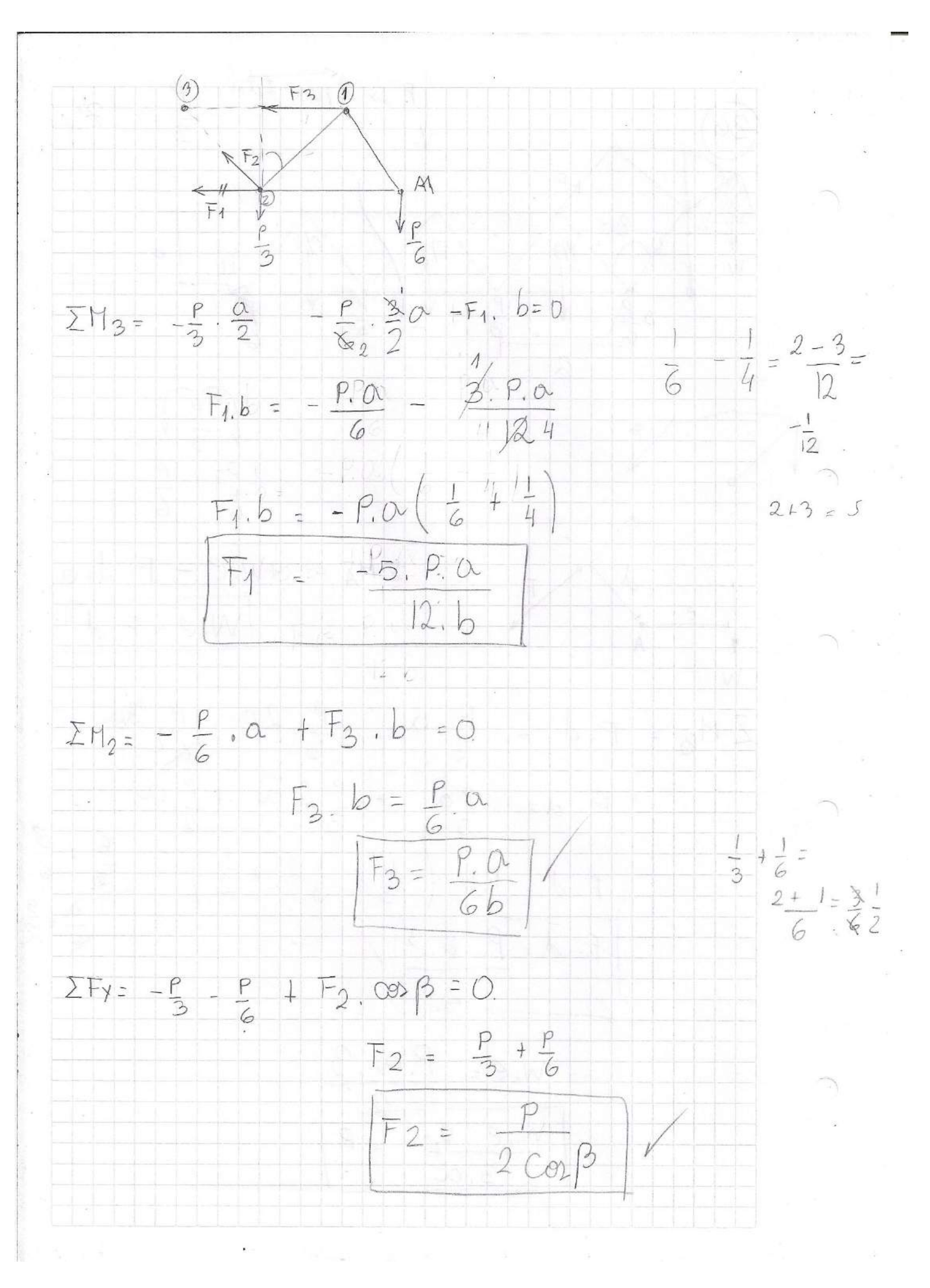
$$F.d = P.a\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}.2 + \frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{6}{6} + \frac{3}{6} \qquad \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

$$\boxed{F.d = \frac{P.a.3}{2}}$$

$$W.e = \frac{P.a.3}{2}$$

$$\boxed{\frac{W.e.2}{3.a} = P}$$



$$\Sigma M_3 = -\frac{P}{3}\cdot\frac{a}{2} - \frac{P}{6}\cdot\frac{3}{2}a - F_1 \cdot b = 0$$

$$F_1 . b = -\frac{P.a}{6} - \frac{3.P.a}{12}$$

$$F_1 . b = -P.a\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4}\right)$$

$$\boxed{F_1 = \frac{-5.P.a}{12.b}}$$

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{4} = \frac{2-3}{12} = -\frac{1}{12}$$

$$2+3=5$$

$$\Sigma M_2 = -\frac{P}{6}\cdot a + F_3 \cdot b = 0$$

$$F_3 . b = \frac{P}{6} a$$

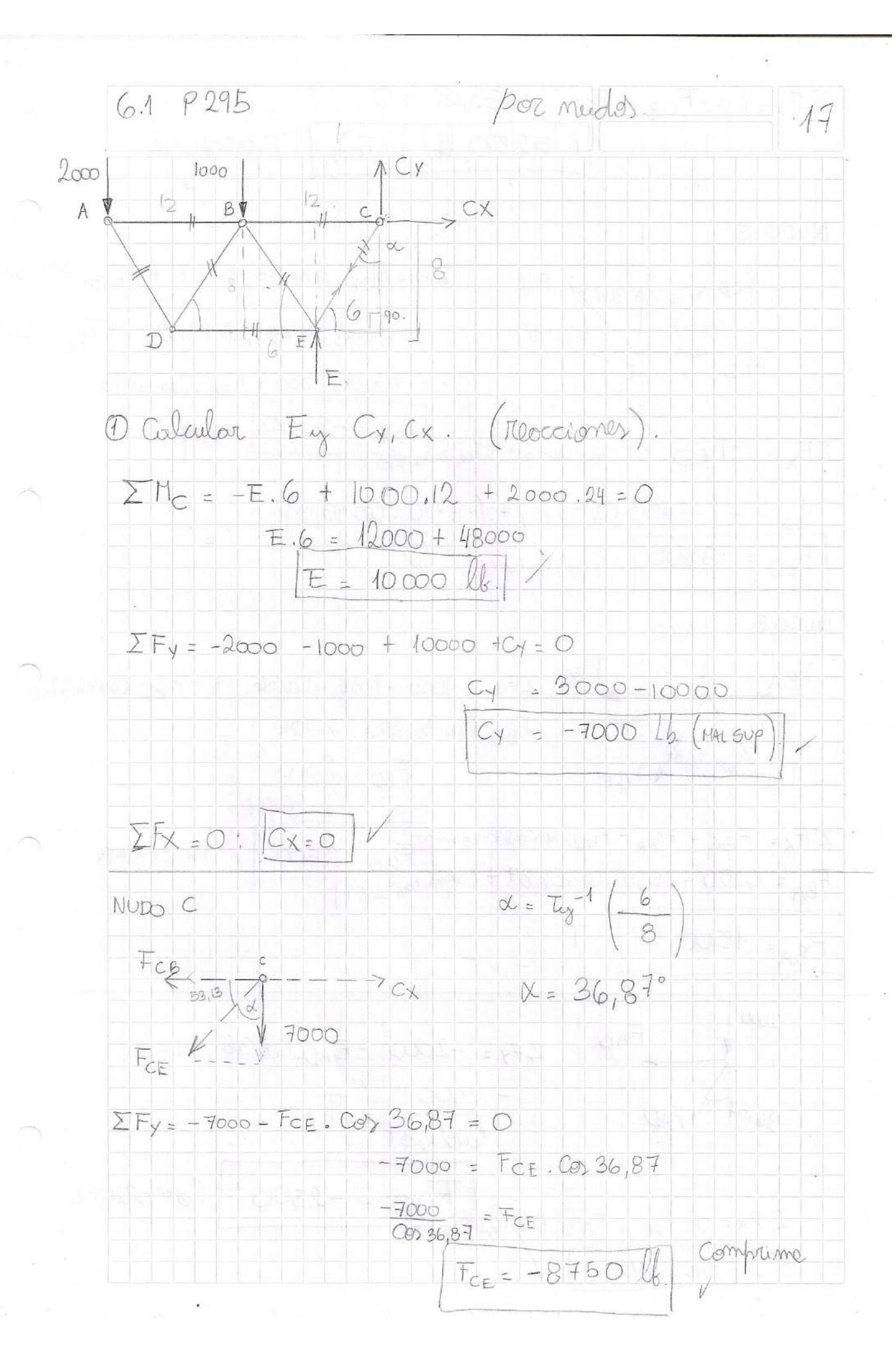
$$\boxed{F_3 = \frac{P.a}{6b}}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2+1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\Sigma F_y = -\frac{P}{3} - \frac{P}{6} + F_2 . \cos\beta = 0$$

$$F_2 = \frac{P}{3} + \frac{P}{6}$$

$$\boxed{F_2 = \frac{P}{2\cos\beta}}$$



① Calcular E y Cy, Cx. (reacciones).

$\sum M_C = -E.6 + 1000.12 + 2000.24 = 0$

$E.6 = 12000 + 48000$

$E = 10\,000$ lb.

$\sum F_y = -2000 - 1000 + 10000 + C_y = 0$

$C_y = 3000 - 10000$

$C_y = -7000$ Lb. (MAL SUP)

$\sum F_x = 0$; $C_x = 0$

NUDO C

$\alpha = Tg^{-1}\left(\frac{6}{8}\right)$

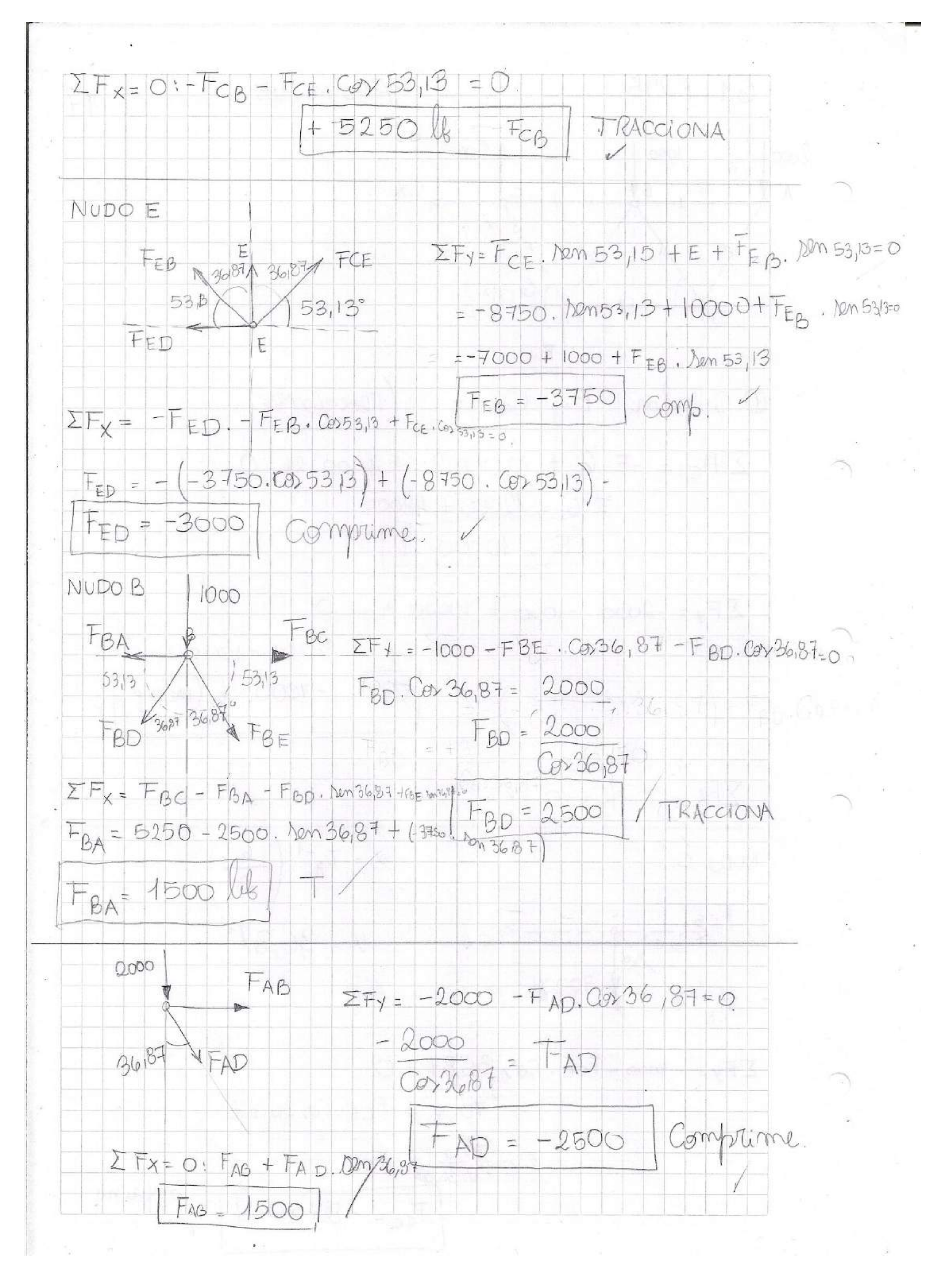
$\alpha = 36,87°$

$\sum F_y = -7000 - F_{CE} . Cos\,36,87 = 0$

$-7000 = F_{CE} . Cos\,36,87$

$\frac{-7000}{Cos\,36,87} = F_{CE}$

$F_{CE} = -8750$ lb. Comprime



$\Sigma F_x = 0 : -F_{CB} - F_{CE} \cdot \cos 53{,}13 = 0$

$+5250\ lb \quad F_{CB}$ TRACCIONA ✓

NUDO E

$\Sigma F_y = F_{CE} \cdot \text{sen}\ 53{,}15 + E + F_{EB} \cdot \text{sen}\ 53{,}13 = 0$

$= -8750 \cdot \text{sen} 53{,}13 + 10000 + F_{EB} \cdot \text{sen} 53{,}13 = 0$

$= -7000 + 1000 + F_{EB} \cdot \text{sen}\ 53{,}13$

$F_{EB} = -3750$ Comp. ✓

$\Sigma F_x = -F_{ED} - F_{EB} \cdot \cos 53{,}13 + F_{CE} \cdot \cos 53{,}13 = 0$

$F_{ED} = -(-3750 \cdot \cos 53{,}13) + (-8750 \cdot \cos 53{,}13)$

$F_{ED} = -3000$ Comprime. ✓

NUDO B

$\Sigma F_y = -1000 - FBE \cdot \cos 36{,}87 - F_{BD} \cdot \cos 36{,}87 = 0$

$F_{BD} \cdot \cos 36{,}87 = 2000$

$F_{BD} = \frac{2000}{\cos 36{,}87}$

$F_{BD} = 2500$ TRACCIONA

$\Sigma F_x = F_{BC} - F_{BA} - F_{BD} \cdot \text{sen}\ 36{,}87 + F_{BE}\ \text{sen}\ 36{,}87 = 0$

$F_{BA} = 5250 - 2500 \cdot \text{sen}\ 36{,}87 + (-3750 \cdot \text{sen}\ 36{,}87)$

$F_{BA} = 1500\ lb$ T

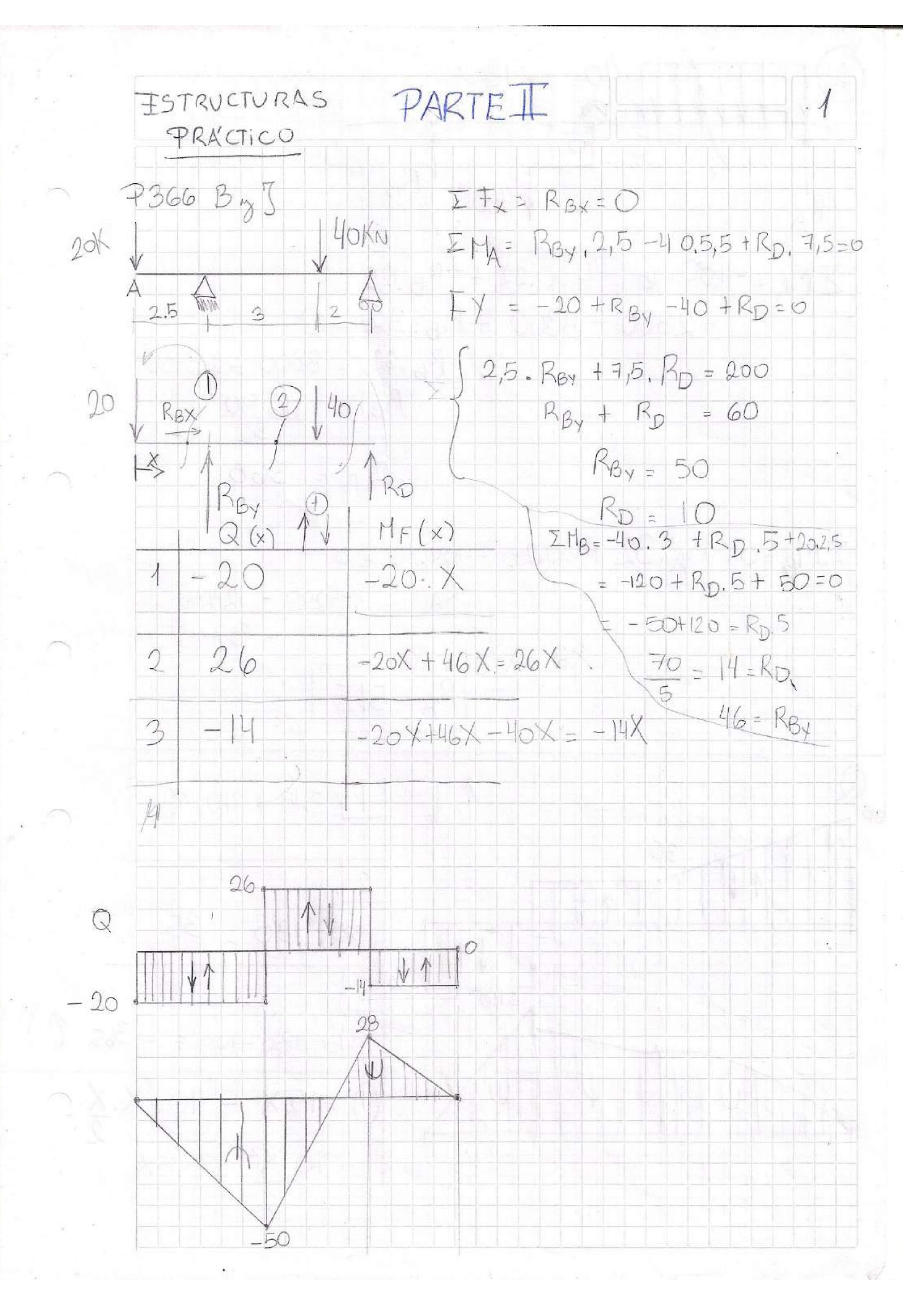
$\Sigma F_y = -2000 - F_{AD} \cdot \cos 36{,}87 = 0$

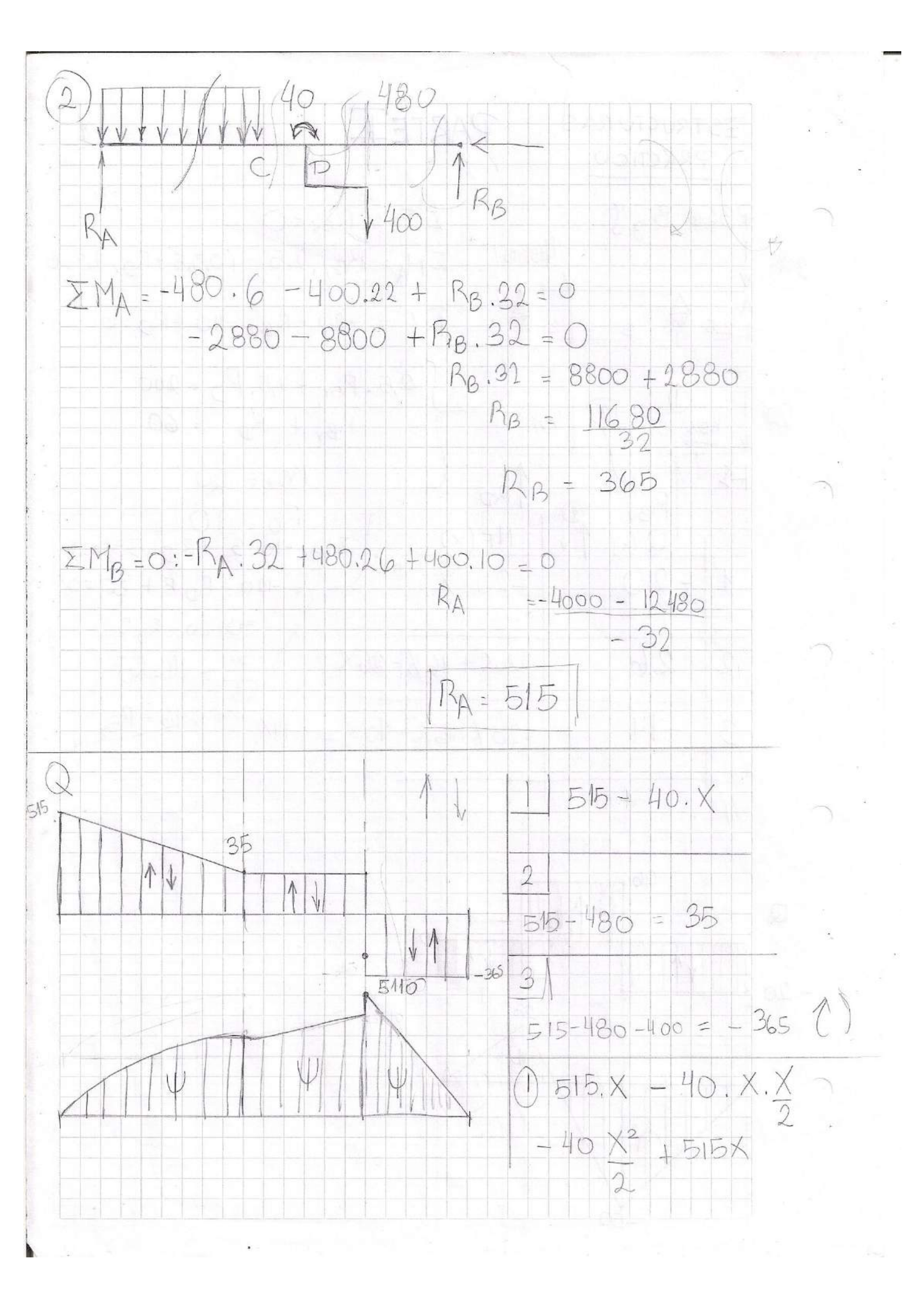
$-\frac{2000}{\cos 36{,}87} = F_{AD}$

$F_{AD} = -2500$ Comprime ✓

$\Sigma F_x = 0 : F_{AB} + F_{AD} \cdot \text{sen}\ 36{,}87$

$F_{AB} = 1500$


ESTRUCTURAS PRÁCTICO
PARTE II
1
P366 By J
20K
40KN
A
2.5
3
2
ΣFx = RBx = 0
ΣMA = RBy . 2,5 − 40.5,5 + RD . 7,5 = 0
FY = −20 + RBy − 40 + RD = 0
2,5 . RBy + 7,5 . RD = 200
RBy + RD = 60
RBy = 50
RD = 10
ΣMB = −40 . 3 + RD . 5 + 20.2,5
= −120 + RD . 5 + 50 = 0
= −50 + 120 = RD . 5
70/5 = 14 = RD
46 = RBy
20
RBX
40
RBy
RD
Q (x)
MF (x)
1
−20
−20 . X
2
26
−20X + 46X = 26X
3
−14
−20X + 46X − 40X = −14X
Q
26
0
−14
−20
28
−50



$\Sigma M_A = -480 \cdot 6 - 400 \cdot 22 + R_B \cdot 32 = 0$

$-2880 - 8800 + R_B \cdot 32 = 0$

$R_B \cdot 32 = 8800 + 2880$

$R_B = \frac{11680}{32}$

$R_B = 365$

$\Sigma M_B = 0 : -R_A \cdot 32 + 480 \cdot 26 + 400 \cdot 10 = 0$

$R_A = \frac{-4000 - 12480}{-32}$

$\boxed{R_A = 515}$

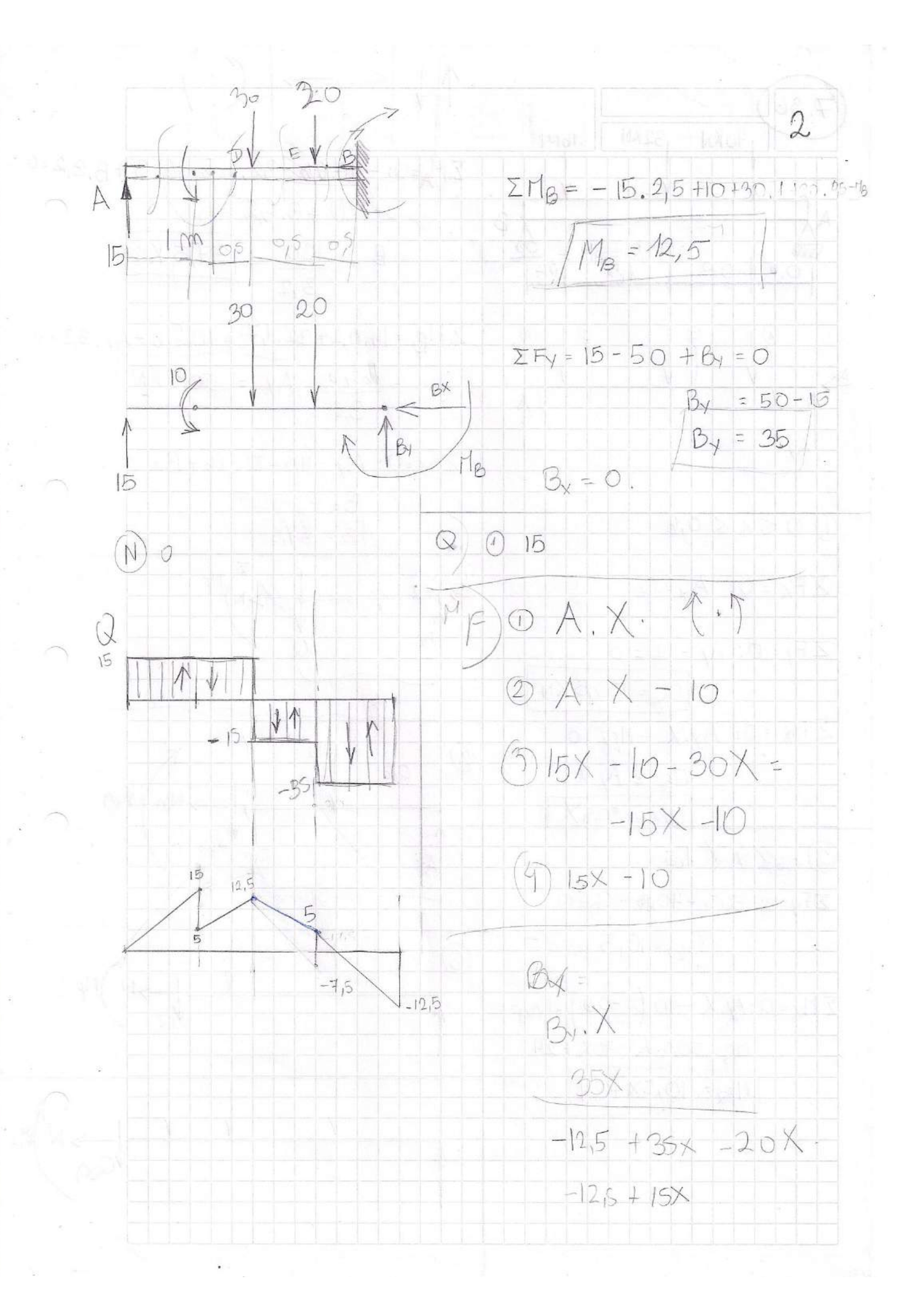
(1) $515 - 40 \cdot X$

(2) $515 - 480 = 35$

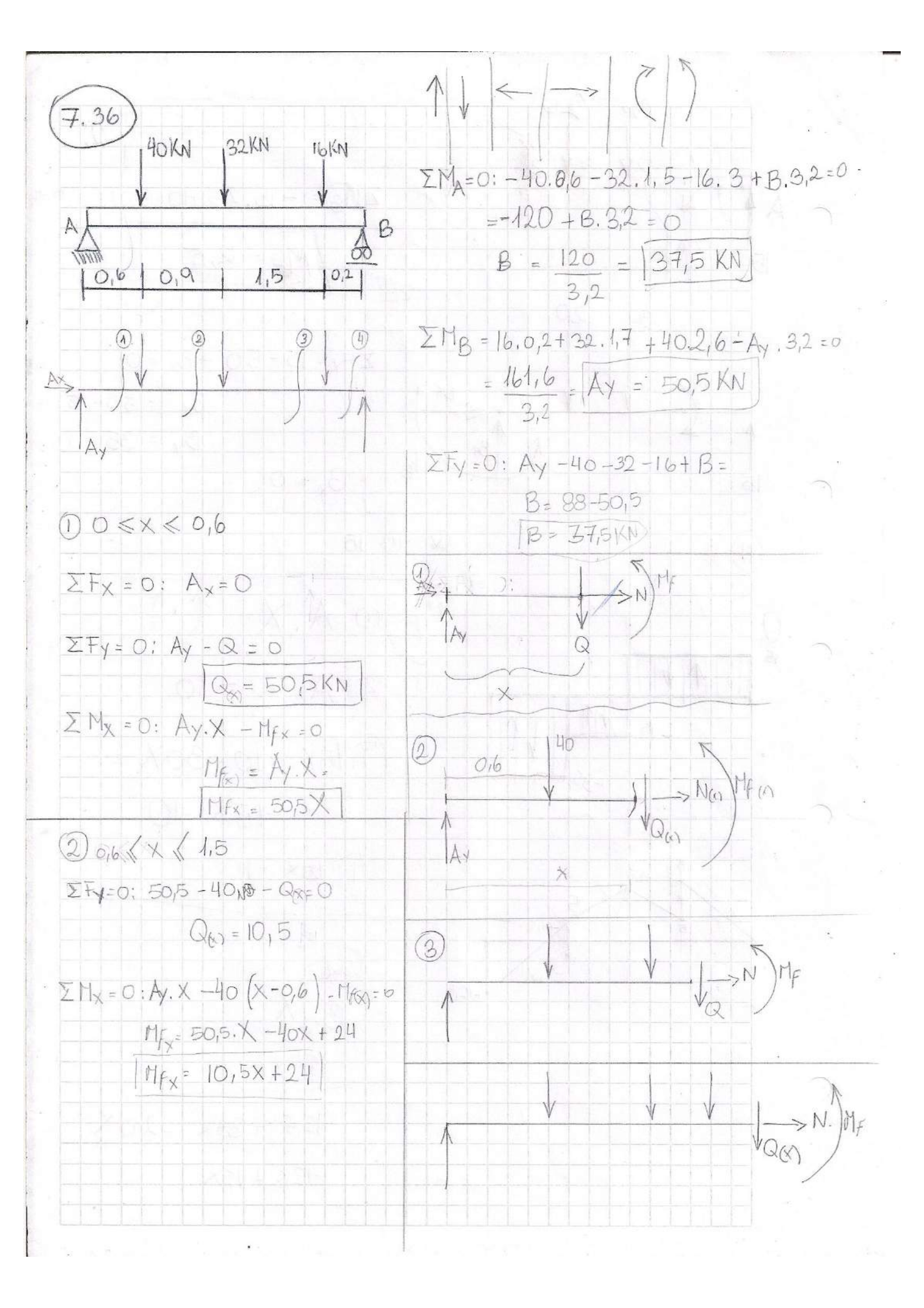
(3) $515 - 480 - 400 = -365$

(1) $515 \cdot X - 40 \cdot X \cdot \frac{X}{2}$

$-40 \frac{X^2}{2} + 515X$



2
30
20
A
D
E
B
15
1 m
0,5
0,5
0,5
ΣM_B = − 15 . 2,5 + 10 + 30 . 1 + 20 . 0,5 − M_B
M_B = 12,5
30
20
10
BX
By
M_B
15
ΣFy = 15 − 50 + By = 0
By = 50 − 15
By = 35
Bx = 0.
N 0
Q ① 15
M_F ① A . X
② A X − 10
③ 15X − 10 − 30X =
−15X − 10
④ 15X − 10
Q
15
− 15
−35
15
12,5
5
5
−7,5
−12,5
By . X
35X
−12,5 + 35x − 20X
−12,5 + 15X


7.36
40KN
32KN
16KN
A
B
0,6
0,9
1,5
0,2
Ax
Ay
① 0 ≤ x ≤ 0,6
ΣFx = 0: Ax = 0
ΣFy = 0: Ay - Q = 0
Q(x) = 50,5 KN
ΣMx = 0: Ay.X - Mfx = 0
Mf(x) = Ay.X
Mfx = 50,5X
② 0,6 ≤ x ≤ 1,5
ΣFy=0: 50,5 - 40 - Q(x) = 0
Q(x) = 10,5
ΣMx = 0: Ay.X - 40 (X-0,6) - Mf(x) = 0
Mfx = 50,5.X - 40X + 24
Mfx = 10,5X + 24
ΣMA=0: -40.0,6 - 32.1,5 - 16.3 + B.3,2 = 0
= -120 + B.3,2 = 0
B = 120 / 3,2 = 37,5 KN
ΣMB = 16.0,2 + 32.1,7 + 40.2,6 - Ay.3,2 = 0
= 161,6 / 3,2 = Ay = 50,5 KN
ΣFy = 0: Ay - 40 - 32 - 16 + B =
B = 88 - 50,5
B = 37,5 KN
N
MF
Q
X
40
0,6
N(x)
MF(x)
Q(x)
x
③
N
MF
Q
N.
MF
Q(x)

③ $1,5 \leqslant X \leqslant 3$

$\Sigma F_y = 50,5 - 40 - 32 - Q_{(x)} = 0$

$$\boxed{Q_{(x)} = -21,5}$$

$\Sigma M_x = 0: A_y . X - 40.(x-0,6) - 32.(X-1,5) = M_{F(x)} = 0$

$M_{f(x)} = 50,5 . X - 40X + 24 - 32X + 48$

$M_{F(x)} = -21,5 . X + 72$

④ $3 \leqslant X \leqslant 3,2$

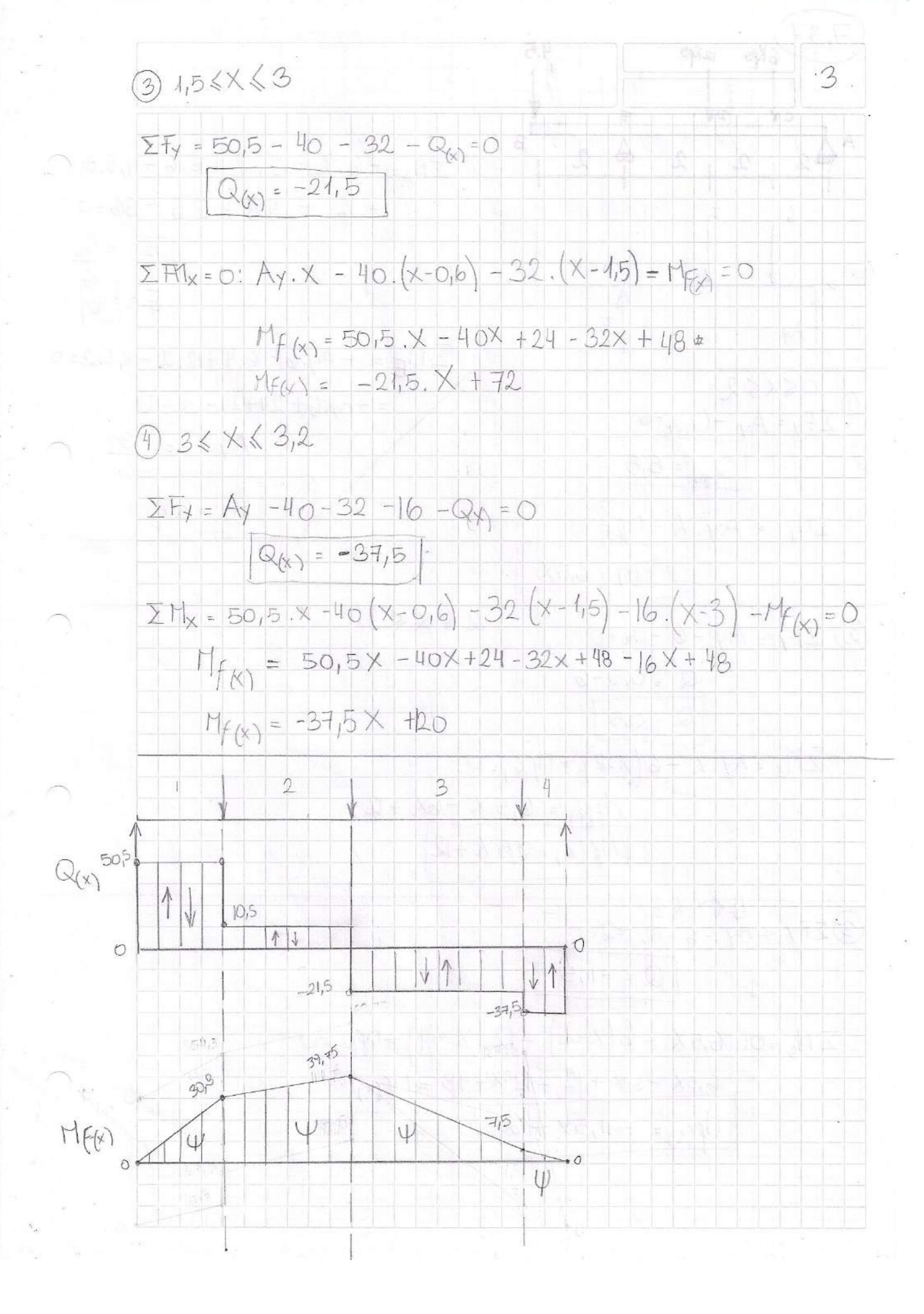
$\Sigma F_y = A_y - 40 - 32 - 16 - Q_{(x)} = 0$

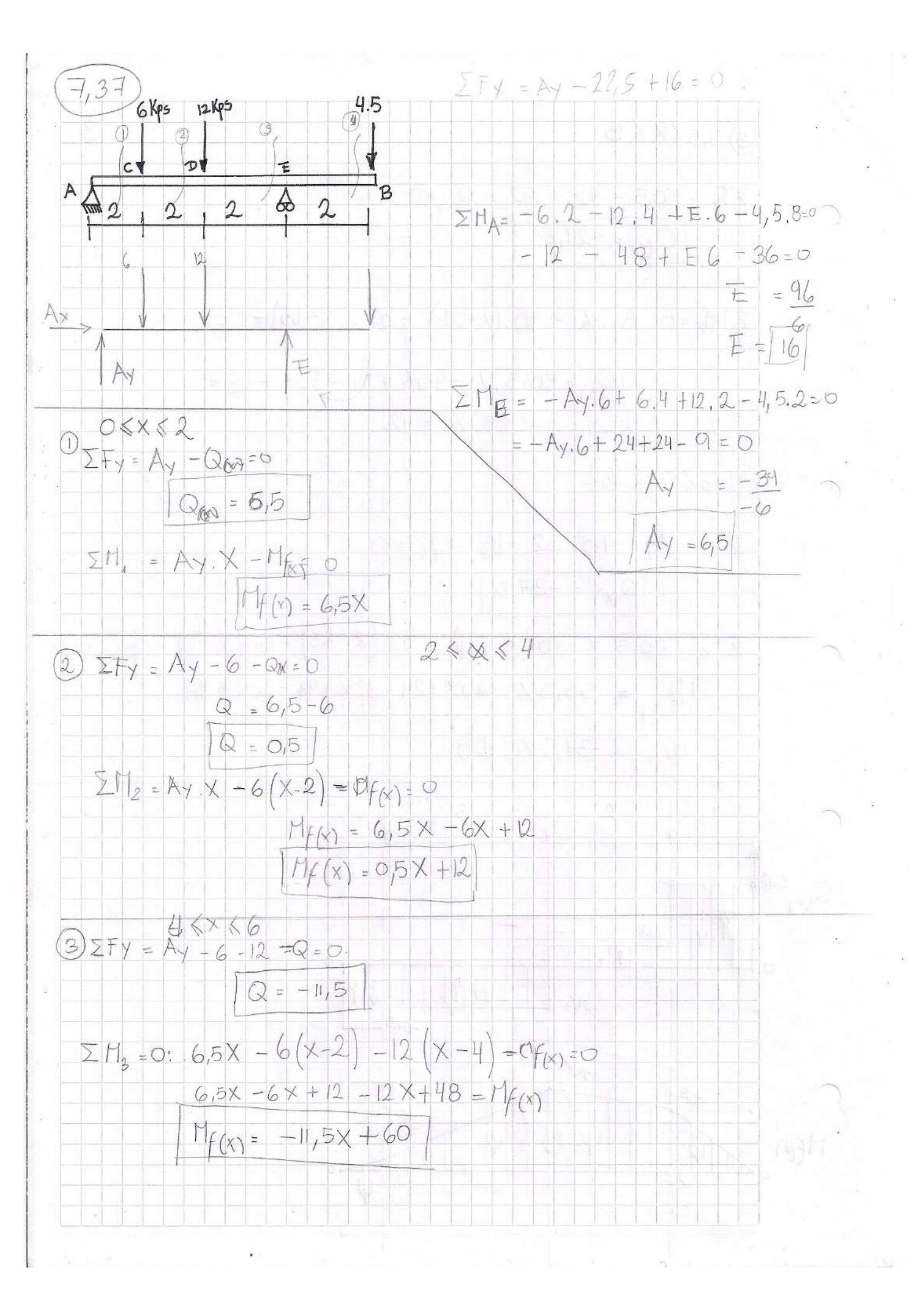
$$\boxed{Q_{(x)} = -37,5}$$

$\Sigma M_x = 50,5 . x - 40(x-0,6) - 32(x-1,5) - 16.(x-3) - M_{f(x)} = 0$

$M_{f(x)} = 50,5X - 40X + 24 - 32x + 48 - 16X + 48$

$M_{f(x)} = -37,5X + 120$





7,37

$\Sigma F_y = A_y - 22,5 + 16 = 0$

$\Sigma M_A = -6.2 - 12.4 + E.6 - 4,5.8 = 0$

$-12 - 48 + E.6 - 36 = 0$

$E = \frac{96}{6}$

$E = 16$

$\Sigma M_E = -A_y.6 + 6.4 + 12.2 - 4,5.2 = 0$

$= -A_y.6 + 24 + 24 - 9 = 0$

$A_y = \frac{-39}{-6}$

$A_y = 6,5$

① $0 \leq x \leq 2$

$\Sigma F_y = A_y - Q_{(x)} = 0$

$Q_{(x)} = 6,5$

$\Sigma M_1 = A_y . X - M_{f(x)} = 0$

$M_{f(x)} = 6,5X$

② $2 \leq x \leq 4$

$\Sigma F_y = A_y - 6 - Q_{(x)} = 0$

$Q = 6,5 - 6$

$Q = 0,5$

$\Sigma M_2 = A_y . X - 6(X-2) - M_{f(x)} = 0$

$M_{f(x)} = 6,5X - 6X + 12$

$M_{f(x)} = 0,5X + 12$

③ $4 \leq x \leq 6$

$\Sigma F_y = A_y - 6 - 12 - Q = 0$

$Q = -11,5$

$\Sigma M_3 = 0: \; 6,5X - 6(x-2) - 12(X-4) - M_{f(x)} = 0$

$6,5X - 6X + 12 - 12X + 48 = M_{f(x)}$

$M_{f(x)} = -11,5X + 60$

④ $6 \leq X \leq 8$

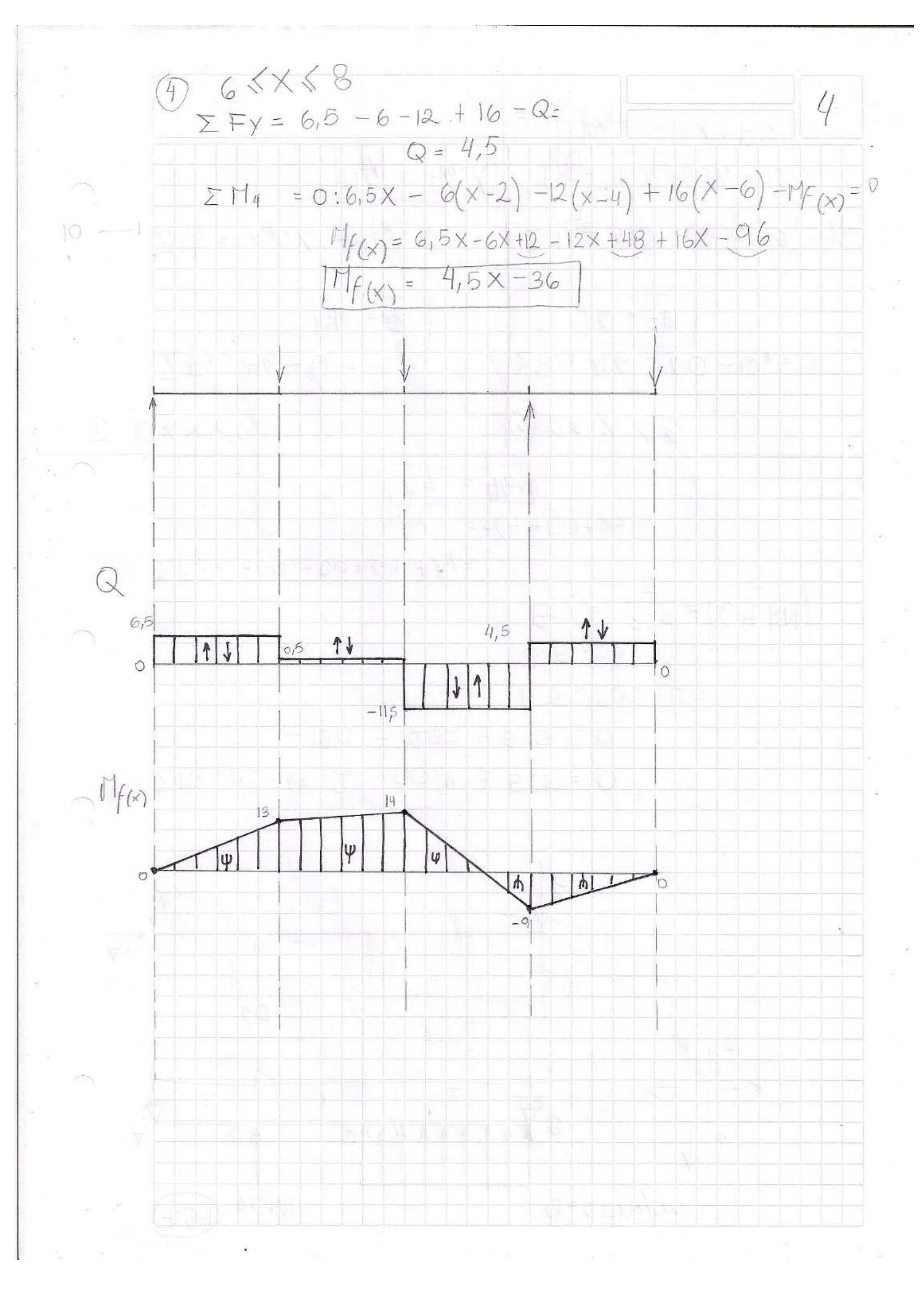
$$\Sigma F_y = 6{,}5 - 6 - 12 + 16 - Q =$$

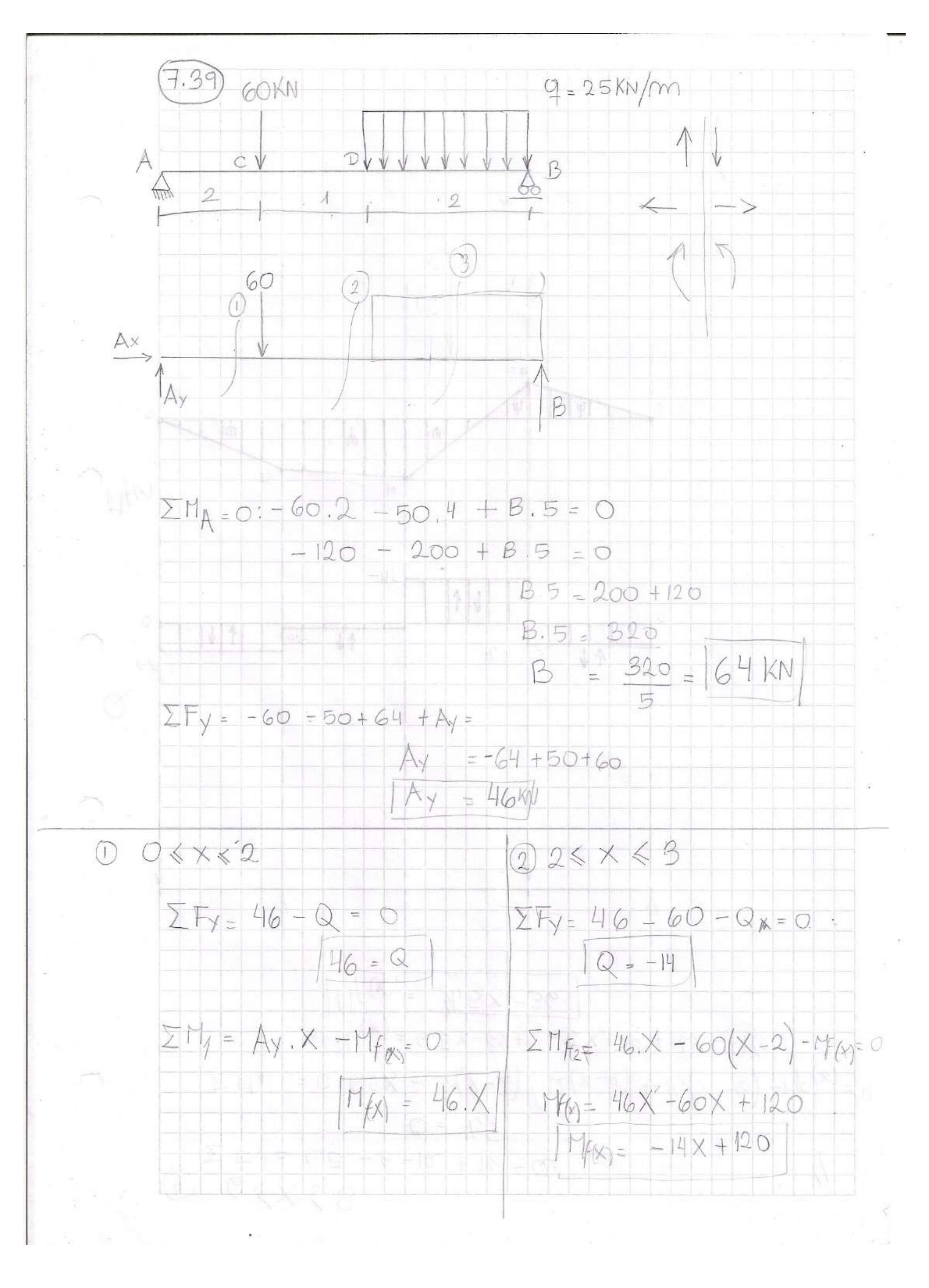
$$Q = 4{,}5$$

$$\Sigma M_4 = 0 : 6{,}5X - 6(X-2) - 12(X-4) + 16(X-6) - M_{f(x)} = 0$$

$$M_{f(x)} = 6{,}5X - 6X + 12 - 12X + 48 + 16X - 96$$

$$\boxed{M_{f(x)} = 4{,}5X - 36}$$





$\Sigma M_A = 0: -60.2 - 50.4 + B.5 = 0$

$-120 - 200 + B.5 = 0$

$B.5 = 200 + 120$

$B.5 = 320$

$B = \frac{320}{5} = \boxed{64 KN}$

$\Sigma F_y = -60 = 50 + 64 + A_y =$

$A_y = -64 + 50 + 60$

$\boxed{A_y = 46KN}$

---

① $0 \leq x \leq 2$

$\Sigma F_y = 46 - Q = 0$

$\boxed{46 = Q}$

$\Sigma M_1 = A_y . X - M_{f(x)} = 0$

$\boxed{M_{f(x)} = 46.X}$

② $2 \leq x \leq 3$

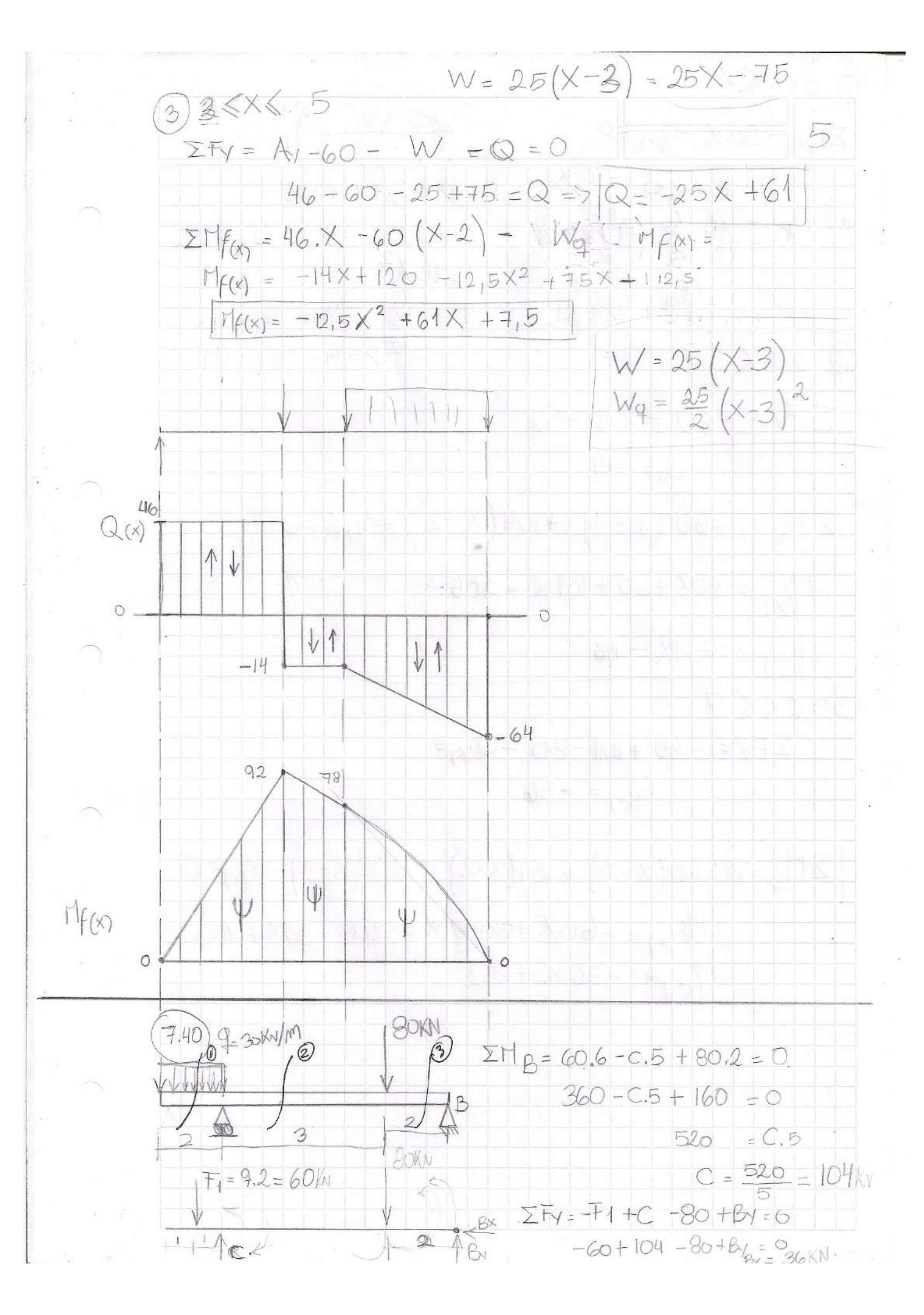
$\Sigma F_y = 46 - 60 - Q = 0$

$\boxed{Q = -14}$

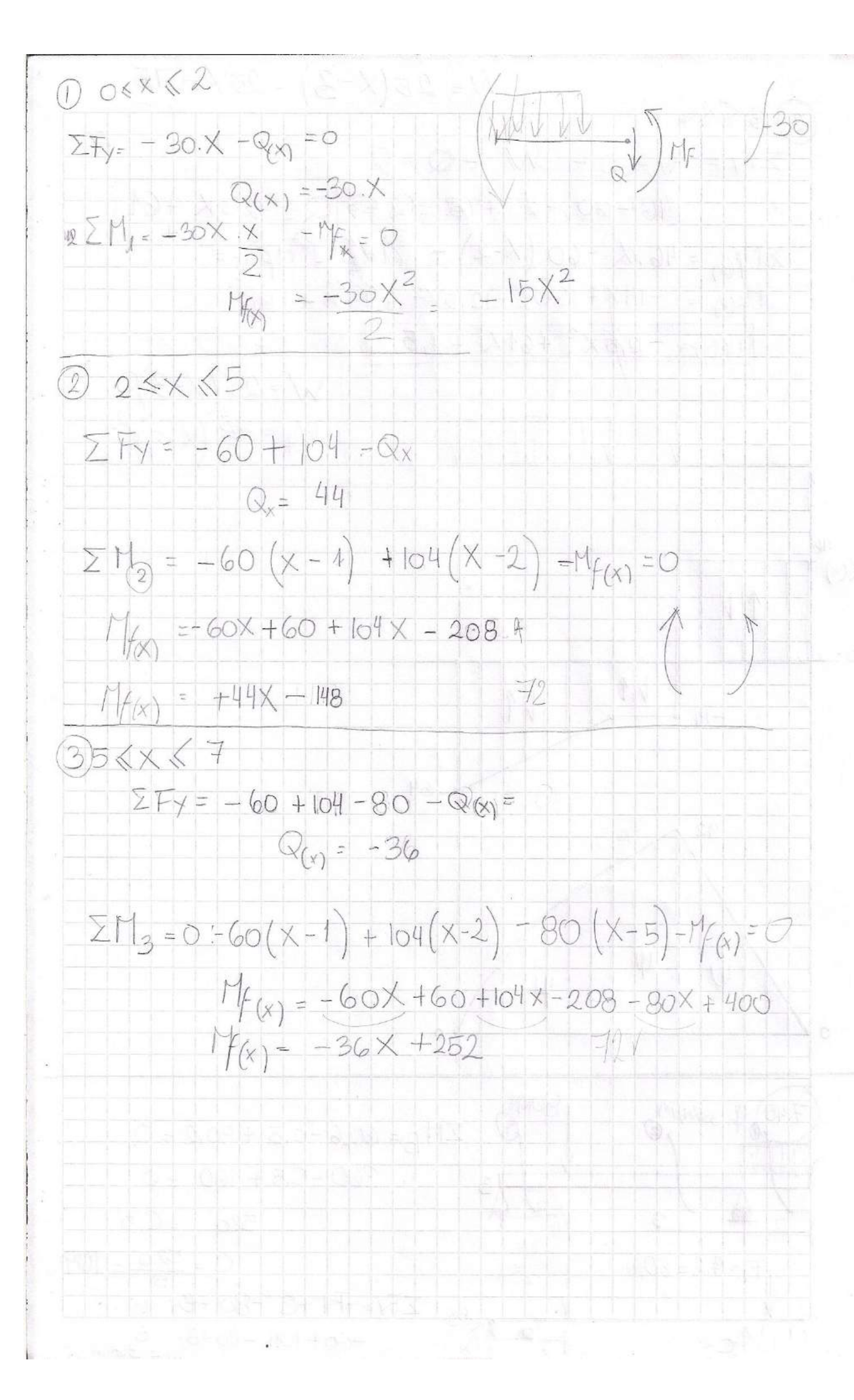
$\Sigma M_{f_2} = 46.X - 60(X-2) - M_{f(x)} = 0$

$M_{f(x)} = 46X - 60X + 120$

$\boxed{M_{f(x)} = -14X + 120}$



W = 25(X-3) = 25X - 75
(3) 3 ≤ X ≤ 5
5
ΣFy = A1 - 60 - W - Q = 0
46 - 60 - 25 + 75 = Q => Q = -25X + 61
ΣMf(x) = 46.X - 60(X-2) - Wq - Mf(x) =
Mf(x) = -14X + 120 - 12,5X² + 75X - 112,5
Mf(x) = -12,5X² + 61X + 7,5
W = 25(X-3)
Wq = 25/2 (X-3)²
Q(x)
46
0
-14
-64
9.2
78
Mf(x)
7.40
q = 30KN/M
80KN
B
2
3
2
ΣMB = 60.6 - C.5 + 80.2 = 0
360 - C.5 + 160 = 0
520 = C.5
C = 520/5 = 104KN
F1 = 9.2 = 60KN
80KN
Bx
C
By
ΣFy = -F1 + C - 80 + By = 0
-60 + 104 - 80 + By = 0
By = 36KN



① $0 \leq X \leq 2$

$\Sigma F_y = -30.X - Q_{(x)} = 0$

$Q_{(x)} = -30.X$

$\Sigma M_1 = -30X \cdot \frac{X}{2} - M_{f_x} = 0$

$M_{f(x)} = -\frac{30X^2}{2} = -15X^2$

② $2 \leq X \leq 5$

$\Sigma F_y = -60 + 104 - Q_x$

$Q_x = 44$

$\Sigma M_{(2)} = -60(X-1) + 104(X-2) - M_{f(x)} = 0$

$M_{f(x)} = -60X + 60 + 104X - 208$

$M_{f(x)} = +44X - 148$ 72

③ $5 \leq X \leq 7$

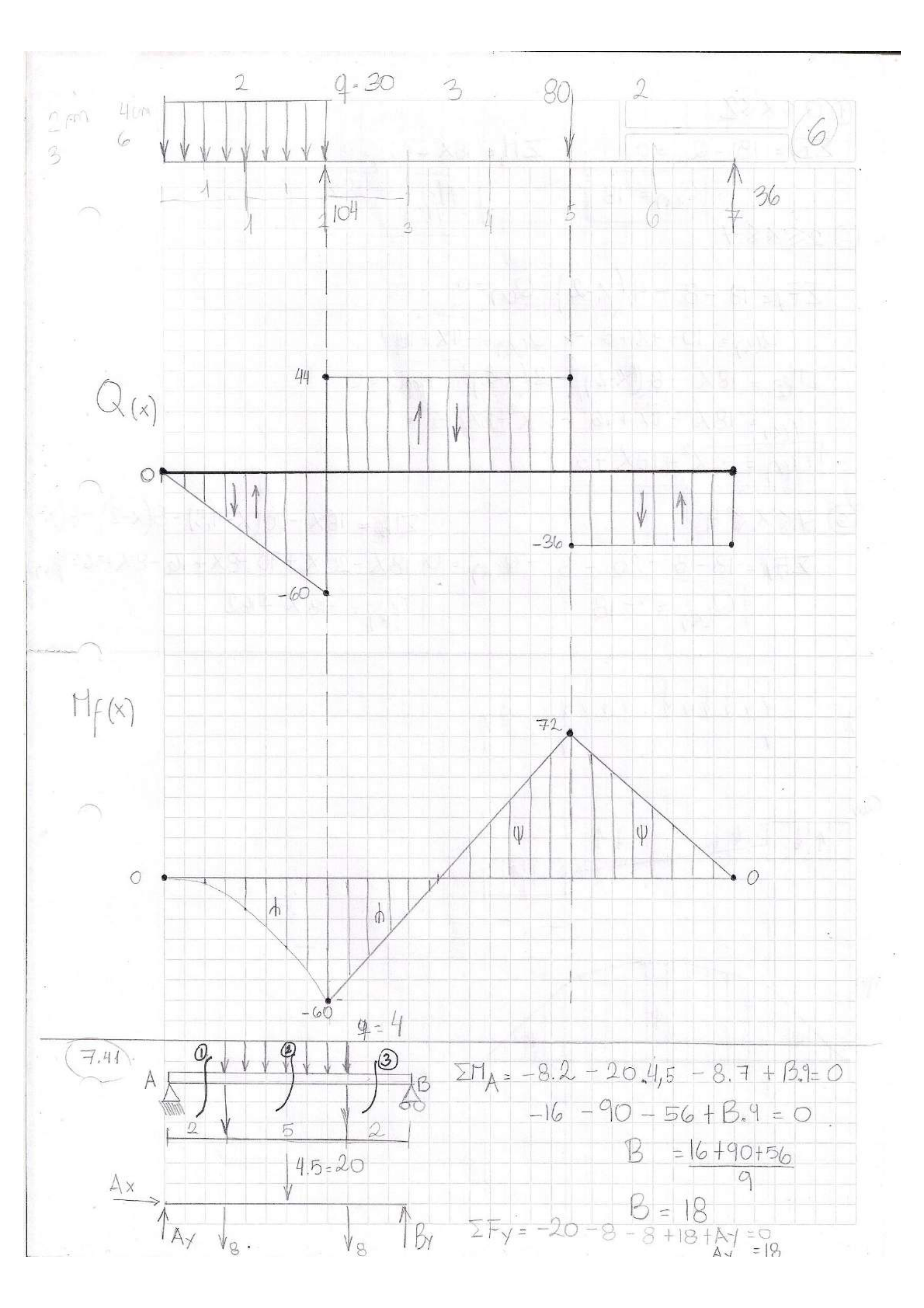
$\Sigma F_y = -60 + 104 - 80 - Q_{(x)} =$

$Q_{(x)} = -36$

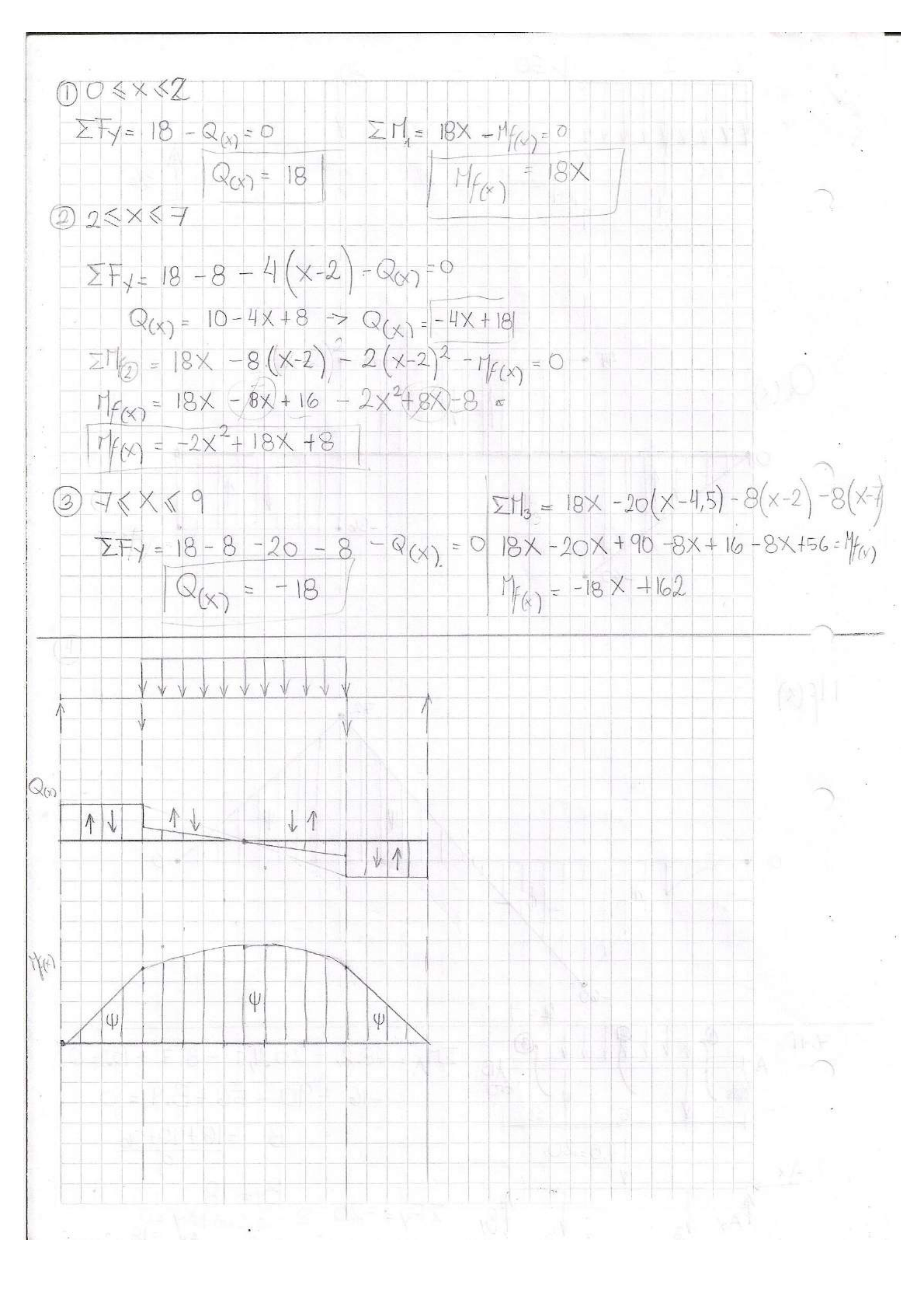
$\Sigma M_3 = 0 : -60(X-1) + 104(X-2) - 80(X-5) - M_{f(x)} = 0$

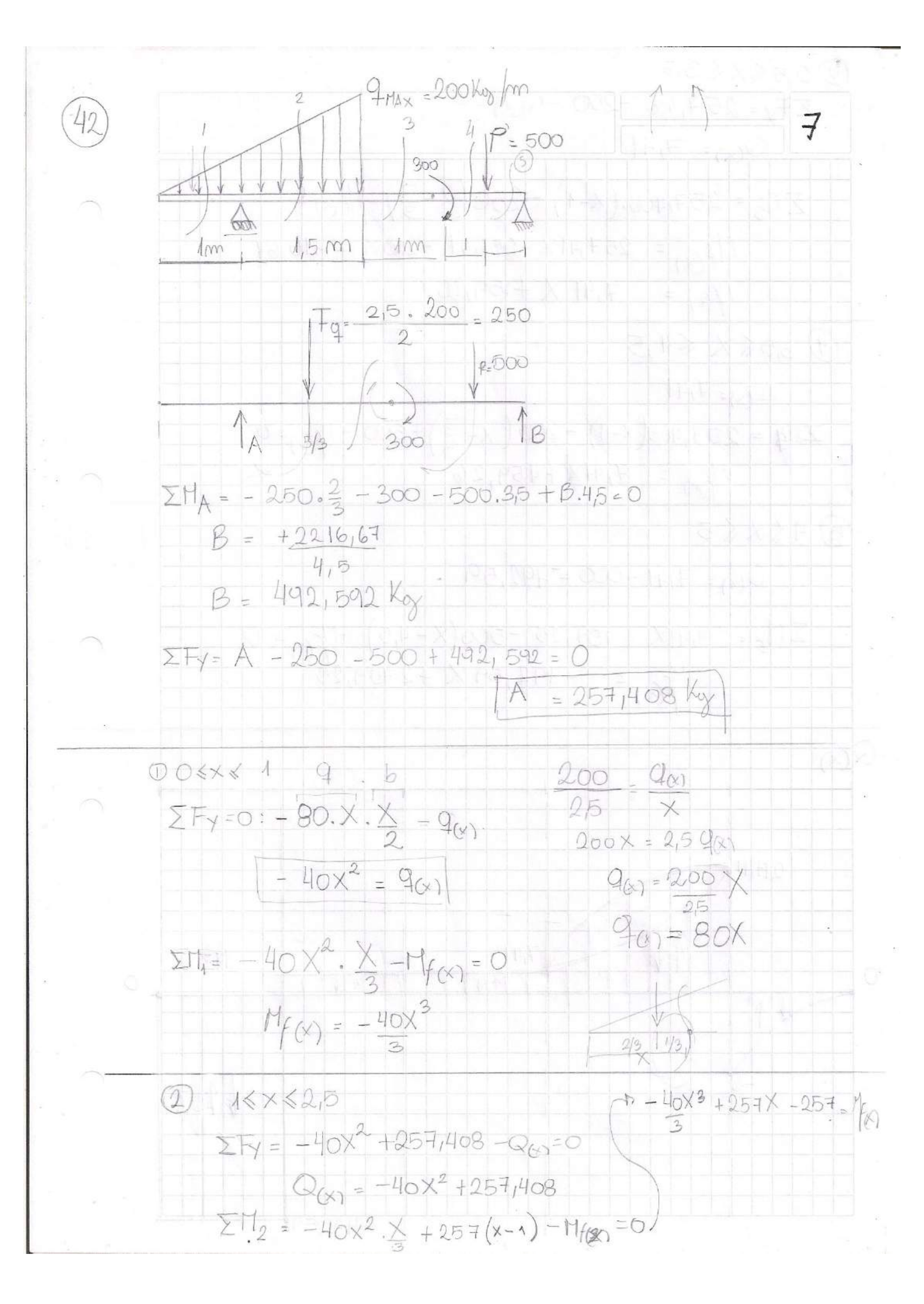
$M_{f(x)} = -60X + 60 + 104X - 208 - 80X + 400$

$M_{f(x)} = -36X + 252$ 72✓



2
q = 30
3
80
2
104
36
Q(x)
44
0
-36
-60
Mf(x)
72
0
-60
q = 4
7.41
A
B
2
5
2
4.5 = 20
Ax
Ay
8
8
By
ΣMA = -8.2 - 20.4,5 - 8.7 + B.9 = 0
-16 - 90 - 56 + B.9 = 0
B = 16+90+56 / 9
B = 18
ΣFy = -20 - 8 - 8 + 18 + Ay = 0
Ay = 18


① $0 \leq x \leq 2$
$\Sigma F_y = 18 - Q_{(x)} = 0$
$Q_{(x)} = 18$
$\Sigma M_1 = 18X - M_{f(x)} = 0$
$M_{f(x)} = 18X$
② $2 \leq X \leq 7$
$\Sigma F_y = 18 - 8 - 4(X-2) - Q_{(x)} = 0$
$Q_{(x)} = 10 - 4X + 8 \rightarrow Q_{(x)} = -4X + 18$
$\Sigma M_{f2} = 18X - 8(X-2) - 2(X-2)^2 - M_{f(x)} = 0$
$M_{f(x)} = 18X - 8X + 16 - 2X^2 + 8X - 8 =$
$M_{f(x)} = -2X^2 + 18X + 8$
③ $7 \leq X \leq 9$
$\Sigma F_y = 18 - 8 - 20 - 8 - Q_{(x)} = 0$
$Q_{(x)} = -18$
$\Sigma M_3 = 18X - 20(X-4,5) - 8(X-2) - 8(X-7)$
$18X - 20X + 90 - 8X + 16 - 8X + 56 = M_{f(x)}$
$M_{f(x)} = -18X + 162$
$Q_{(x)}$
$M_{f(x)}$
ψ
ψ
ψ



(42)

7

$\Sigma M_A = -250 \cdot \frac{2}{3} - 300 - 500 \cdot 3,5 + B \cdot 4,5 = 0$

$B = \frac{+2216,67}{4,5}$

$B = 492,592\ Kg$

$\Sigma F_y = A - 250 - 500 + 492,592 = 0$

$A = 257,408\ Kg$

① $0 \leq x \leq 1$

$\Sigma F_y = 0: -80 \cdot X \cdot \frac{X}{2} - q_{(x)}$

$-40X^2 = q_{(x)}$

$\frac{200}{2,5} = \frac{q_{(x)}}{X}$

$200X = 2,5\, q_{(x)}$

$q_{(x)} = \frac{200}{2,5} X$

$q_{(x)} = 80X$

$\Sigma M_1 = -40X^2 \cdot \frac{X}{3} - M_{f(x)} = 0$

$M_{f(x)} = -\frac{40X^3}{3}$

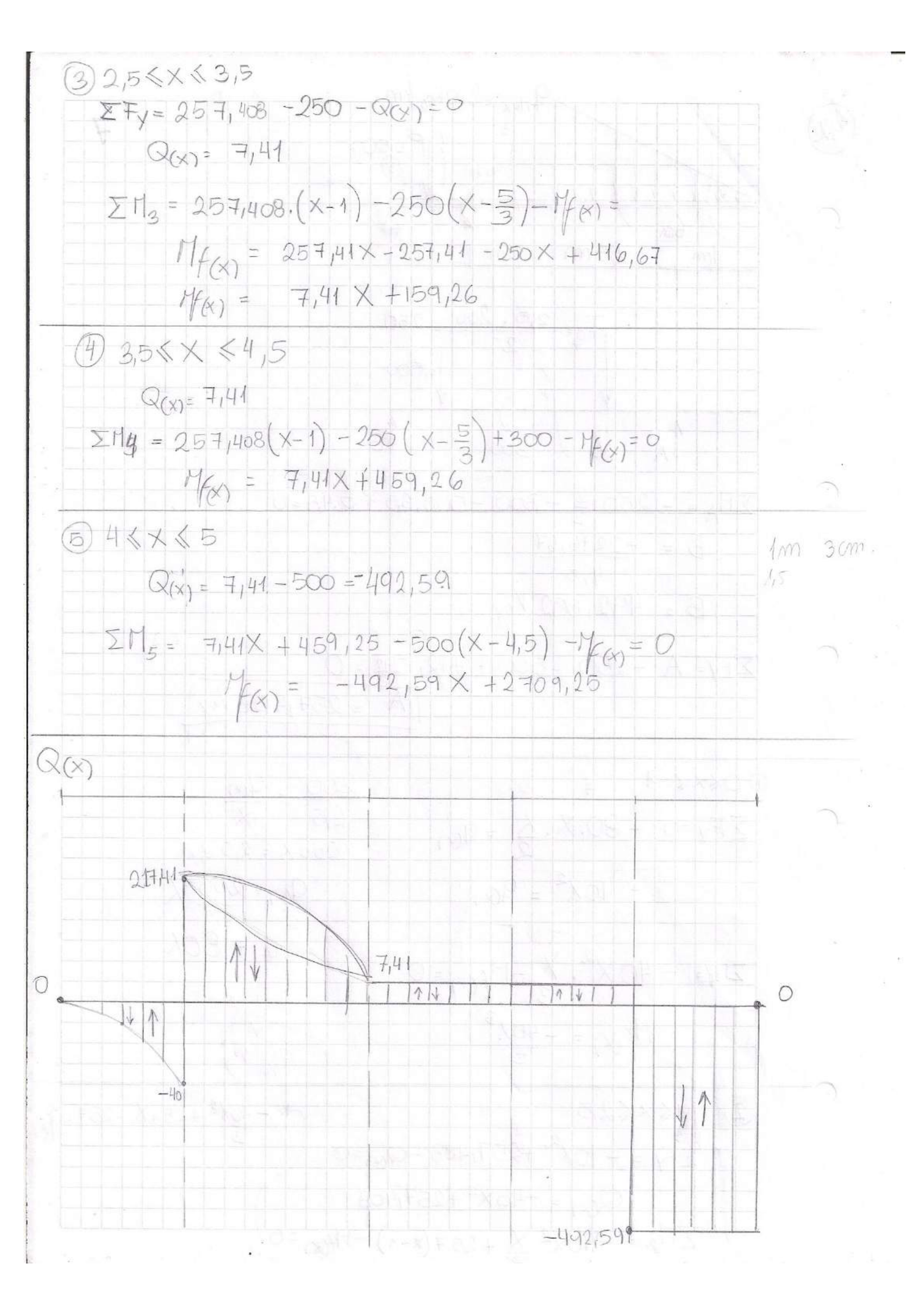
② $1 \leq X \leq 2,5$

$\Sigma F_y = -40X^2 + 257,408 - Q_{(x)} = 0$

$Q_{(x)} = -40X^2 + 257,408$

$\Sigma M_2 = -40x^2 \cdot \frac{X}{3} + 257(x-1) - M_{f(x)} = 0$

$\rightarrow -\frac{40X^3}{3} + 257X - 257 = M_{f(x)}$



③ $2{,}5 \leqslant x \leqslant 3{,}5$

$\Sigma F_y = 257{,}408 - 250 - Q_{(x)} = 0$

$Q_{(x)} = 7{,}41$

$\Sigma M_3 = 257{,}408 \cdot (x-1) - 250\left(x - \frac{5}{3}\right) - M_{f(x)} =$

$M_{f(x)} = 257{,}41x - 257{,}41 - 250x + 416{,}67$

$M_{f(x)} = 7{,}41x + 159{,}26$

④ $3{,}5 \leqslant x \leqslant 4{,}5$

$Q_{(x)} = 7{,}41$

$\Sigma M_4 = 257{,}408(x-1) - 250\left(x - \frac{5}{3}\right) + 300 - M_{f(x)} = 0$

$M_{f(x)} = 7{,}41x + 459{,}26$

⑤ $4 \leqslant x \leqslant 5$

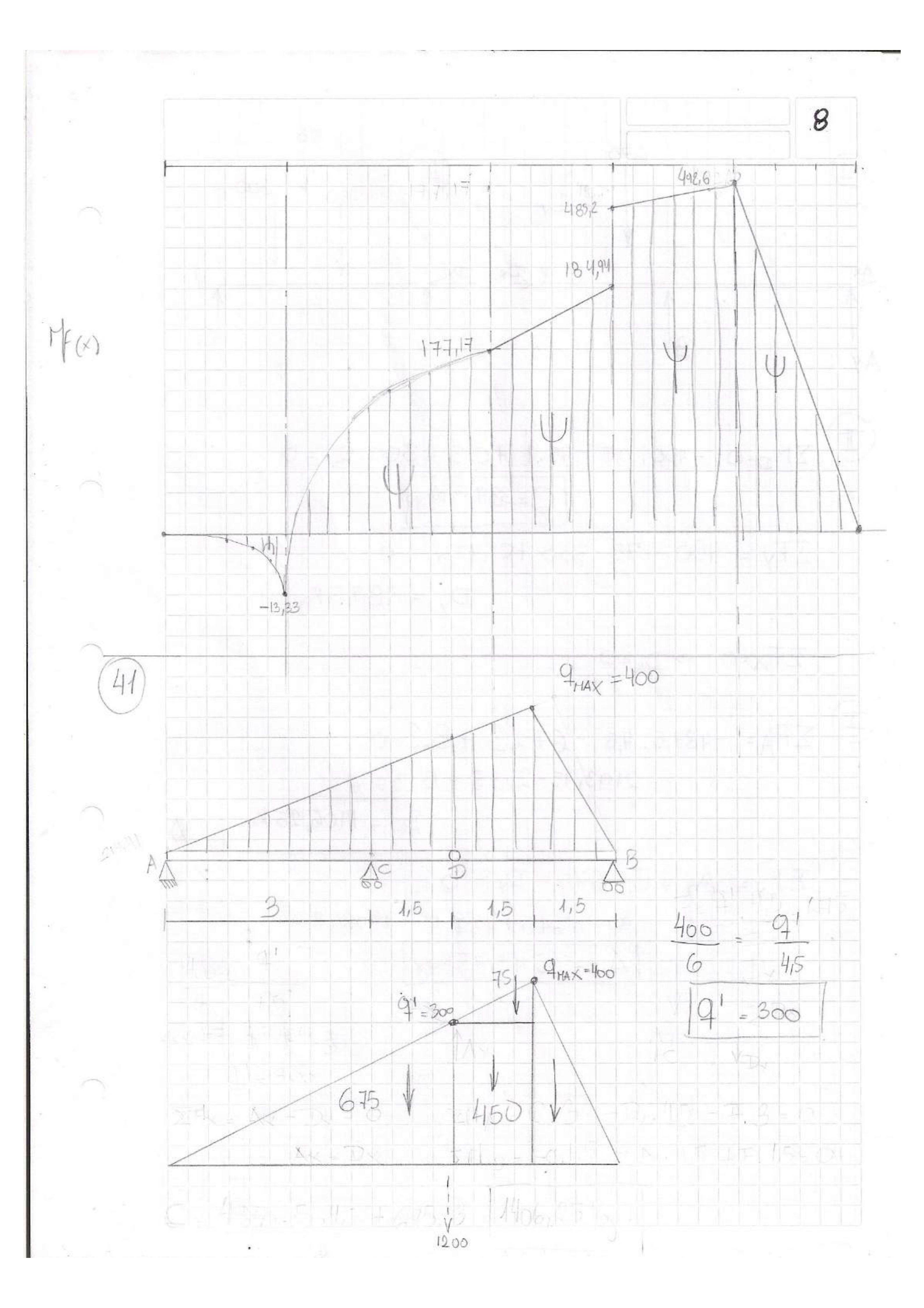
1m 3cm.
1,5

$Q_{(x)} = 7{,}41 - 500 = -492{,}59$

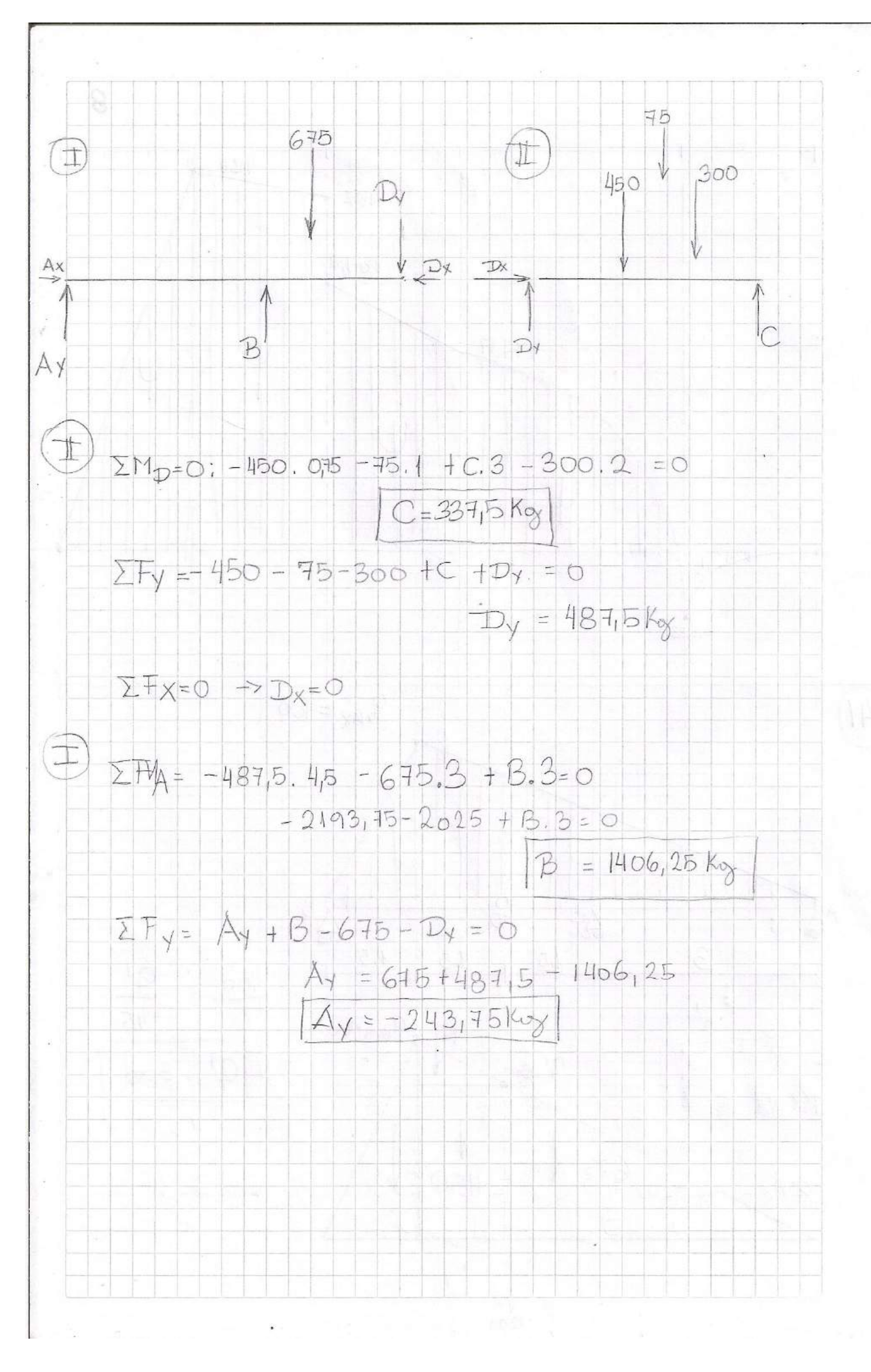
$\Sigma M_5 = 7{,}41x + 459{,}25 - 500(x - 4{,}5) - M_{f(x)} = 0$

$M_{f(x)} = -492{,}59x + 2709{,}25$

$Q_{(x)}$



Mf(x)
492,6
485,2
184,94
177,17
-13,33
41
$q_{MAX} = 400$
A
C
D
B
3
1,5
1,5
1,5
$\frac{400}{6} = \frac{q'}{4,5}$
$q' = 300$
$q' = 300$
75
$q_{MAX} = 400$
675
450
1200



II

$$\Sigma M_D = 0;\ -450 \cdot 0{,}75 - 75 \cdot 1 + C \cdot 3 - 300 \cdot 2 = 0$$

$$\boxed{C = 337{,}5 \text{ Kg}}$$

$$\Sigma F_y = -450 - 75 - 300 + C + D_y = 0$$

$$D_y = 487{,}5 \text{ Kg}$$

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow D_x = 0$$

I

$$\Sigma M_A = -487{,}5 \cdot 4{,}5 - 675 \cdot 3 + B \cdot 3 = 0$$

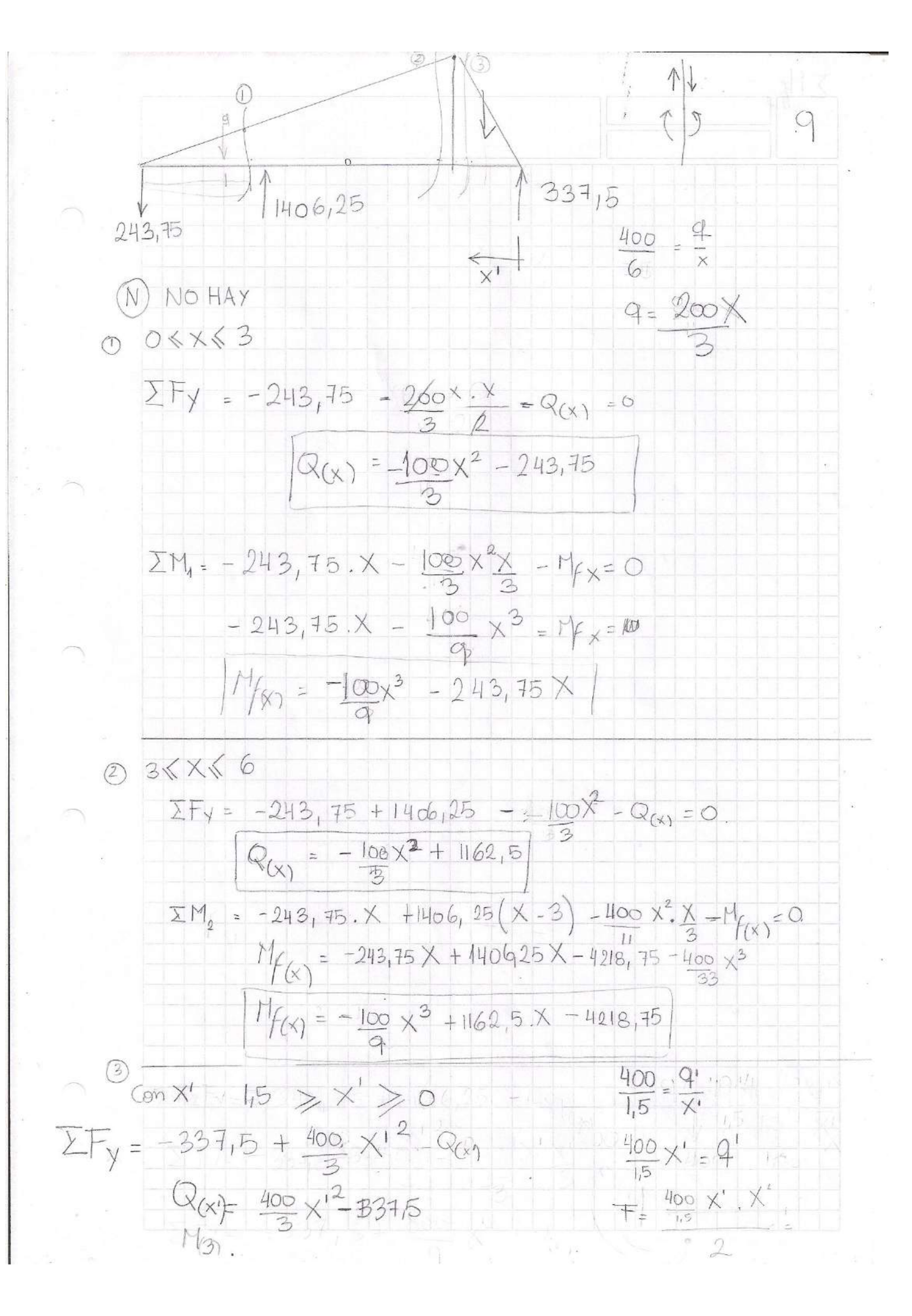
$$-2193{,}75 - 2025 + B \cdot 3 = 0$$

$$\boxed{B = 1406{,}25 \text{ Kg}}$$

$$\Sigma F_y = A_y + B - 675 - D_y = 0$$

$$A_y = 675 + 487{,}5 - 1406{,}25$$

$$\boxed{A_y = -243{,}75 \text{ Kg}}$$



$\frac{400}{6} = \frac{q}{x}$

$q = \frac{200 X}{3}$

(N) NO HAY

① $0 \leqslant X \leqslant 3$

$\Sigma F_y = -243,75 - \frac{200}{3} x \cdot \frac{x}{2} - Q_{(x)} = 0$

$$Q_{(x)} = -\frac{100}{3} X^2 - 243,75$$

$\Sigma M_1 = -243,75 \cdot X - \frac{100}{3} x^2 \frac{X}{3} - M_{f\,x} = 0$

$-243,75 \cdot X - \frac{100}{9} x^3 = M_{f\,x}$

$$M_{f(x)} = -\frac{100}{9} x^3 - 243,75 X$$

② $3 \leqslant X \leqslant 6$

$\Sigma F_y = -243,75 + 1406,25 - \frac{100}{3} X^2 - Q_{(x)} = 0$

$$Q_{(x)} = -\frac{100}{3} X^2 + 1162,5$$

$\Sigma M_2 = -243,75 \cdot X + 1406,25 (X - 3) - \frac{400}{11} X^2 \cdot \frac{X}{3} - M_{f(x)} = 0$

$M_{f(x)} = -243,75 X + 140625 X - 4218,75 - \frac{400}{33} X^3$

$$M_{f(x)} = -\frac{100}{9} X^3 + 1162,5 \cdot X - 4218,75$$

③ Con X' $1,5 \geqslant X' \geqslant 0$

$\frac{400}{1,5} = \frac{q'}{X'}$

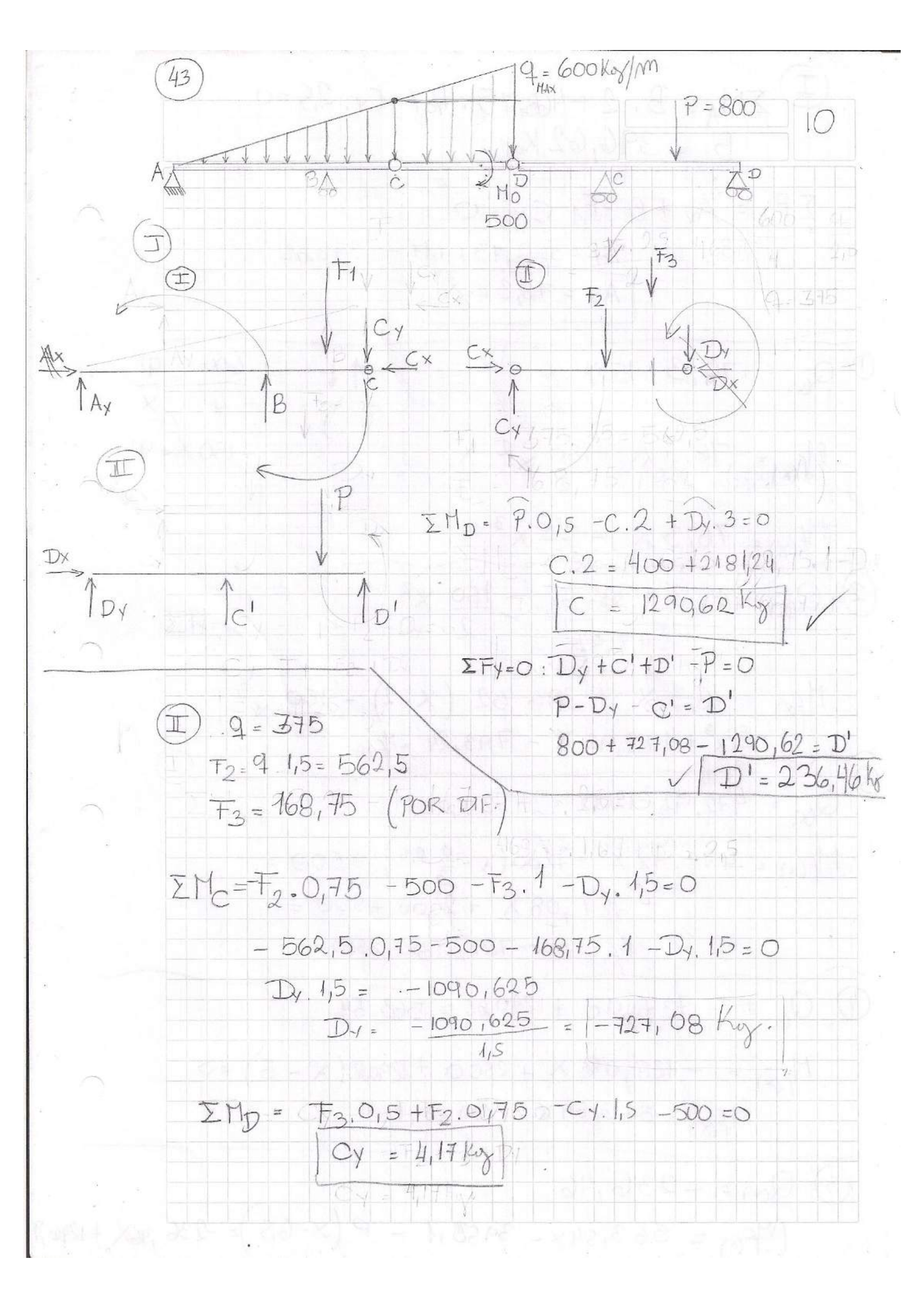
$\Sigma F_y = -337,5 + \frac{400}{3} X'^2 - Q_{(x')}$

$\frac{400}{1,5} X' = q'$

$Q_{(x')} = \frac{400}{3} X'^2 - 337,5$

$F = \frac{\frac{400}{1,5} X' \cdot X'}{2}$

$M_{(3)}$.



$\Sigma M_D = P \cdot 0{,}5 - C \cdot 2 + D_y \cdot 3 = 0$

$C \cdot 2 = 400 + 2181{,}24$

$C = 1290{,}62$ Kg ✓

$\Sigma F_y = 0: D_y + C' + D' - P = 0$

$P - D_y - C' = D'$

$800 + 727{,}08 - 1290{,}62 = D'$

✓ $D' = 236{,}46$ Kg

(II) $q = 375$

$F_2 = q \cdot 1{,}5 = 562{,}5$

$F_3 = 168{,}75$ (POR DIF.)

$\Sigma M_C = -F_2 \cdot 0{,}75 - 500 - F_3 \cdot 1 - D_y \cdot 1{,}5 = 0$

$-562{,}5 \cdot 0{,}75 - 500 - 168{,}75 \cdot 1 - D_y \cdot 1{,}5 = 0$

$D_y \cdot 1{,}5 = -1090{,}625$

$D_y = \dfrac{-1090{,}625}{1{,}5} = -727{,}08$ Kg.

$\Sigma M_D = F_3 \cdot 0{,}5 + F_2 \cdot 0{,}75 - C_y \cdot 1{,}5 - 500 = 0$

$C_y = 4{,}17$ Kg

(I) $\Sigma M_A = B \cdot 2 - 468{,}75 \cdot 1{,}67 - C_y \cdot 2{,}5 = 0.$

$B = 396{,}62\ Kg$

$\Sigma P_y = A_y + B - F_1 - C_y = 0$

$A_y = 468{,}75 + 4{,}17 - 396{,}62$

$\boxed{A_y = 76{,}3\ Kg}$

---

(1) $Q_{(x)} = +76{,}3 - 150X \cdot \frac{X}{2}$

$\frac{600}{4} = \frac{q'}{x}$

$150X = q'$

$M_{f(x)} = 76{,}3X - \frac{150}{2}x^2 \frac{X}{3}$

$M_{f(x)} = 76{,}3X - \frac{150}{6}X^3$

---

(2) $Q_{(x)} = \underbrace{76{,}3 + 396{,}62}_{472{,}92} - \frac{150}{2}X^2$

$M_{f(x)} = 76{,}3 \cdot X + 396{,}62 \cdot (X-2) - \frac{150}{6}X^3$

$-\frac{150}{6}x^3 + 472{,}92X - 793{,}24 = M_{f(x)}$

---

(3) $Q_{(x)} = 472{,}92 - 1200 = -727{,}08.$

$M_{f(x)} = 472{,}92X - 1200\left(X - \frac{2}{3} \cdot 2{,}5\right) + 500 =$

$-727{,}08X + 2000 + 500 = 0$

$M_{f(x)} = -727{,}08X + 2500$

---

(4) $Q_{(x)} = -727{,}08 + 1290{,}62 = 563{,}54$

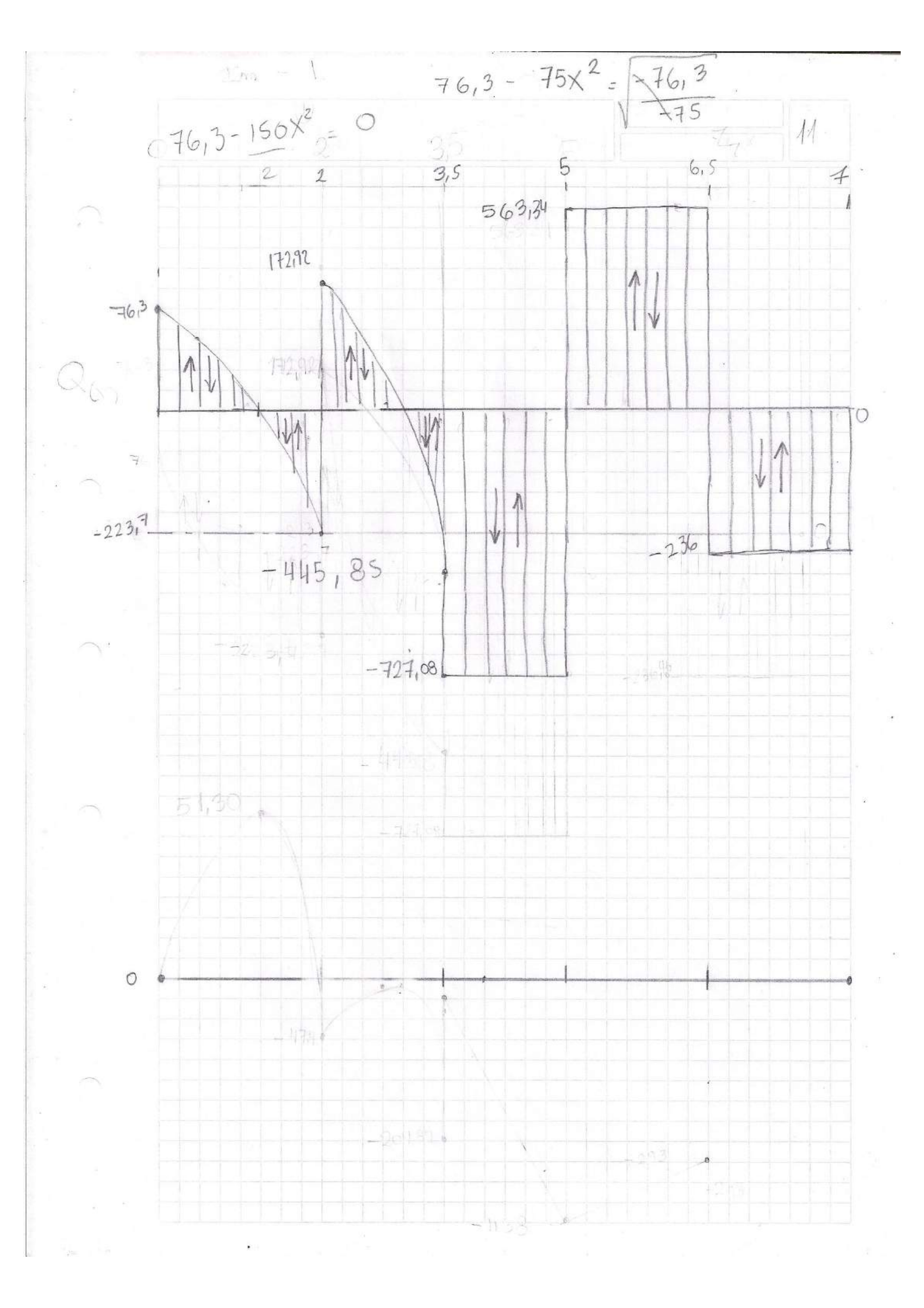
$M_{f(x)} = -727{,}08X + 2500 + 1290{,}62 \cdot (X-5) = 0.$

$M_{f(x)} = 563{,}54X - 3953{,}1 =$

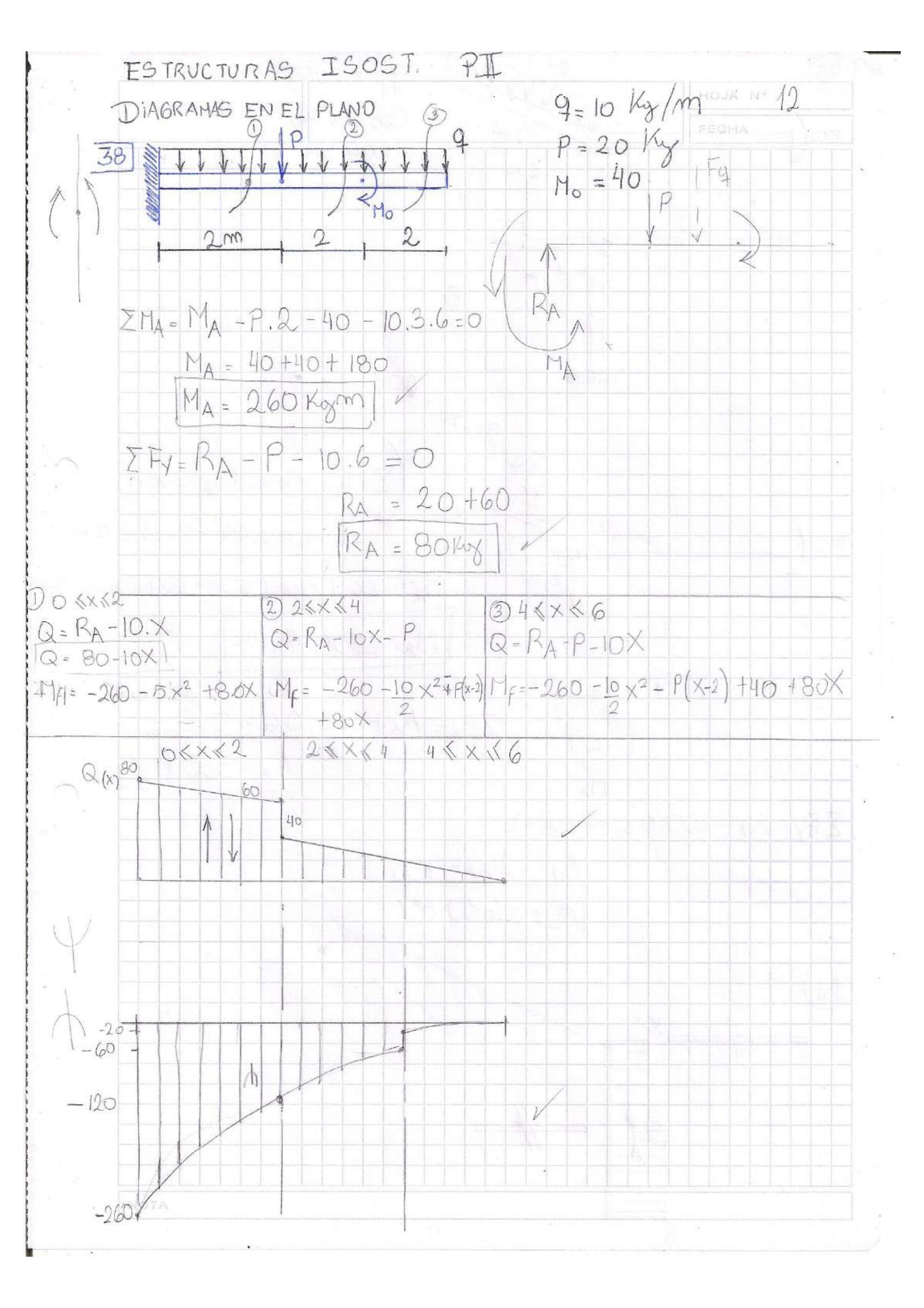
---

(5) $Q_{(x)} = -236{,}46$

$M_{f(x)} = 563{,}54x - 3953{,}1 - P(X - 6{,}5) = -236{,}46X + 1246{,}$



$76,3 - 75x^2 = \sqrt{\frac{-76,3}{-75}}$
$76,3 - 150x^2 = 0$
11
2
2
3,5
5
6,5
7
563,34
172,92
76,3
Q
-223,7
-445,85
-727,08
-236
0
0



ESTRUCTURAS ISOST. PII

HOJA N° 12

DIAGRAMAS EN EL PLANO

38

$q = 10\ Kg/m$

$P = 20\ Kg$

$M_o = 40$

$\sum M_A = M_A - P.2 - 40 - 10.3.6 = 0$

$M_A = 40 + 40 + 180$

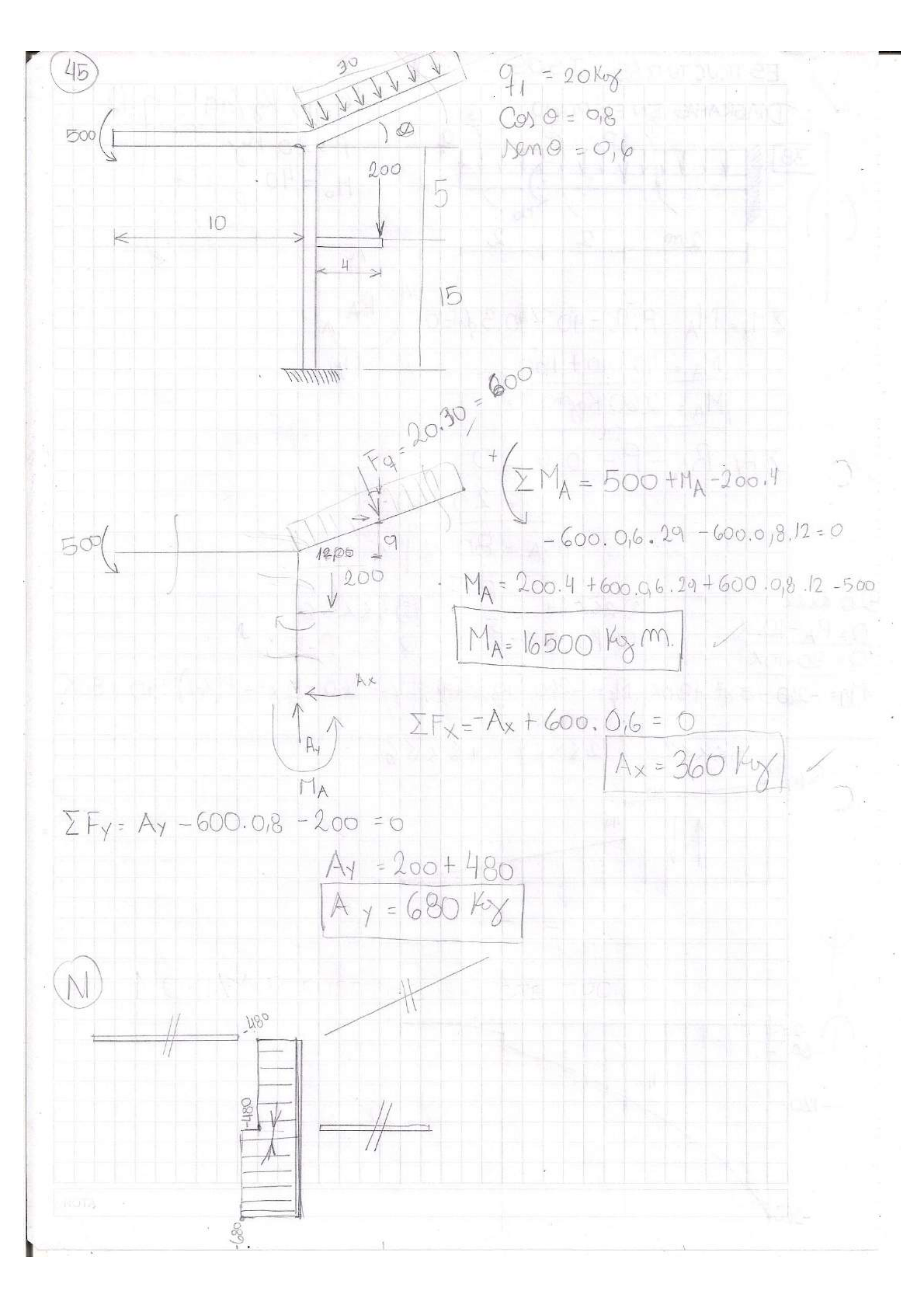
$\boxed{M_A = 260\ Kgm}$

$\sum F_y = R_A - P - 10.6 = 0$

$R_A = 20 + 60$

$\boxed{R_A = 80 Kg}$

① $0 \leqslant x \leqslant 2$	② $2 \leqslant x \leqslant 4$	③ $4 \leqslant x \leqslant 6$
$Q = R_A - 10.X$	$Q = R_A - 10X - P$	$Q = R_A - P - 10X$
$\boxed{Q = 80 - 10X}$		
$M_f = -260 - 5X^2 + 80X$	$M_f = -260 - \frac{10}{2}X^2 - P(x-2) + 80X$	$M_f = -260 - \frac{10}{2}X^2 - P(X-2) + 40 + 80X$



45
30
500
200
10
4
5
15
$q_1 = 20 Kg$
$\cos\theta = 0{,}8$
$\operatorname{sen}\theta = 0{,}6$
$F_q = 20.30 = 600$
$\sum M_A = 500 + M_A - 200.4 - 600.0{,}6.29 - 600.0{,}8.12 = 0$
$M_A = 200.4 + 600.0{,}6.29 + 600.0{,}8.12 - 500$
$M_A = 16500\ Kg\,m.$
$\sum F_x = -A_x + 600.0{,}6 = 0$
$A_x = 360\ Kg$
$\sum F_y = A_y - 600.0{,}8 - 200 = 0$
$A_y = 200 + 480$
$A_y = 680\ Kg$
N
-480
-480
-680

HOJA Nº 13

FECHA 20.X

600

0

200

360

$-20x \cdot \frac{x}{2} = -10x^2$

-9000

-500

-8500

-11 100

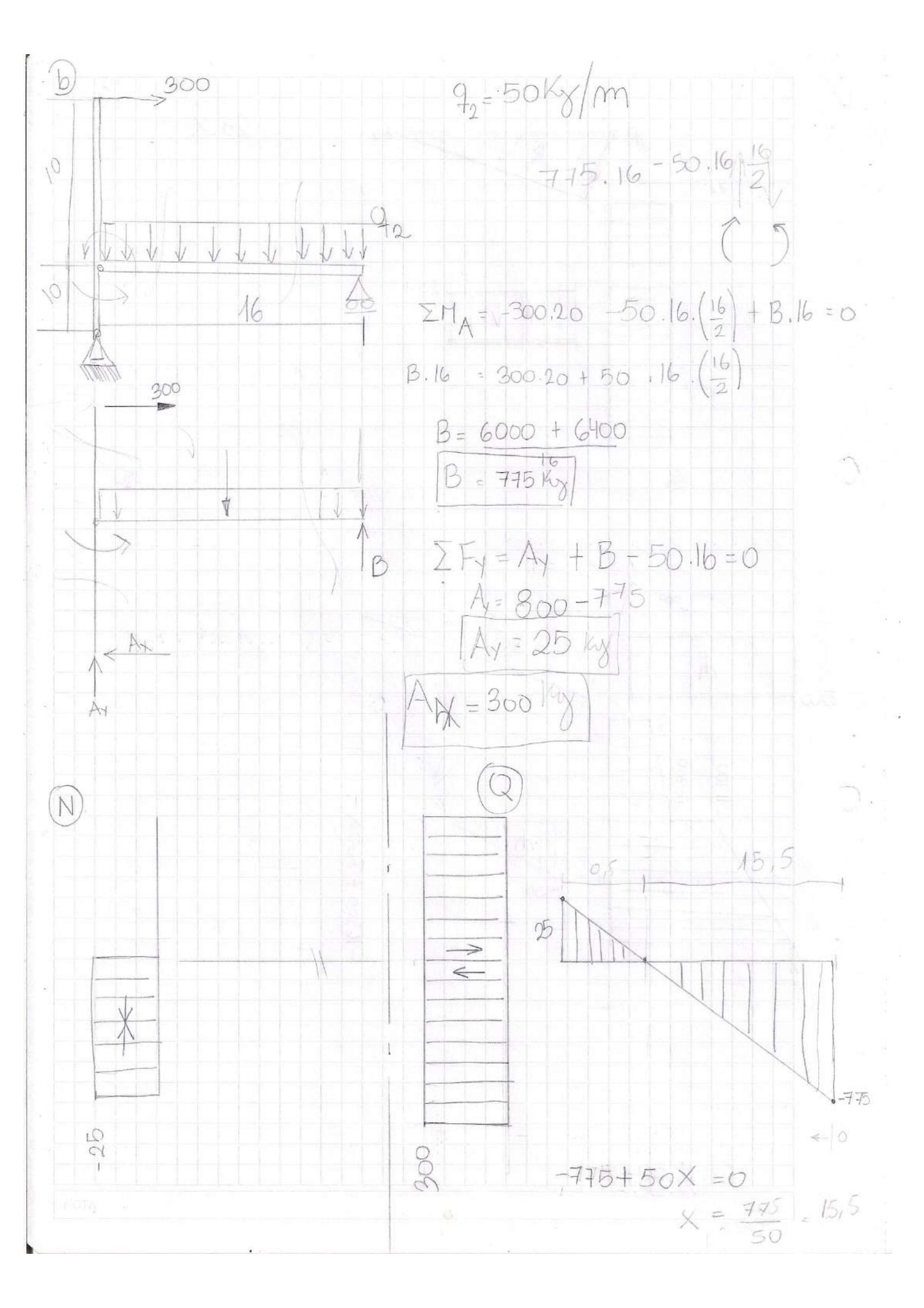
-10300

-800

-16500

$-16500 + 360x$

NOTA



$q_2 = 50 \text{ Kg/m}$

$775 \cdot 16 - 50 \cdot 16 \cdot \frac{16}{2}$

$\Sigma M_A = -300 \cdot 20 - 50 \cdot 16 \cdot \left(\frac{16}{2}\right) + B \cdot 16 = 0$

$B \cdot 16 = 300 \cdot 20 + 50 \cdot 16 \cdot \left(\frac{16}{2}\right)$

$B = \frac{6000 + 6400}{16}$

$\boxed{B = 775 \text{ Kg}}$

$\Sigma F_y = A_y + B - 50 \cdot 16 = 0$

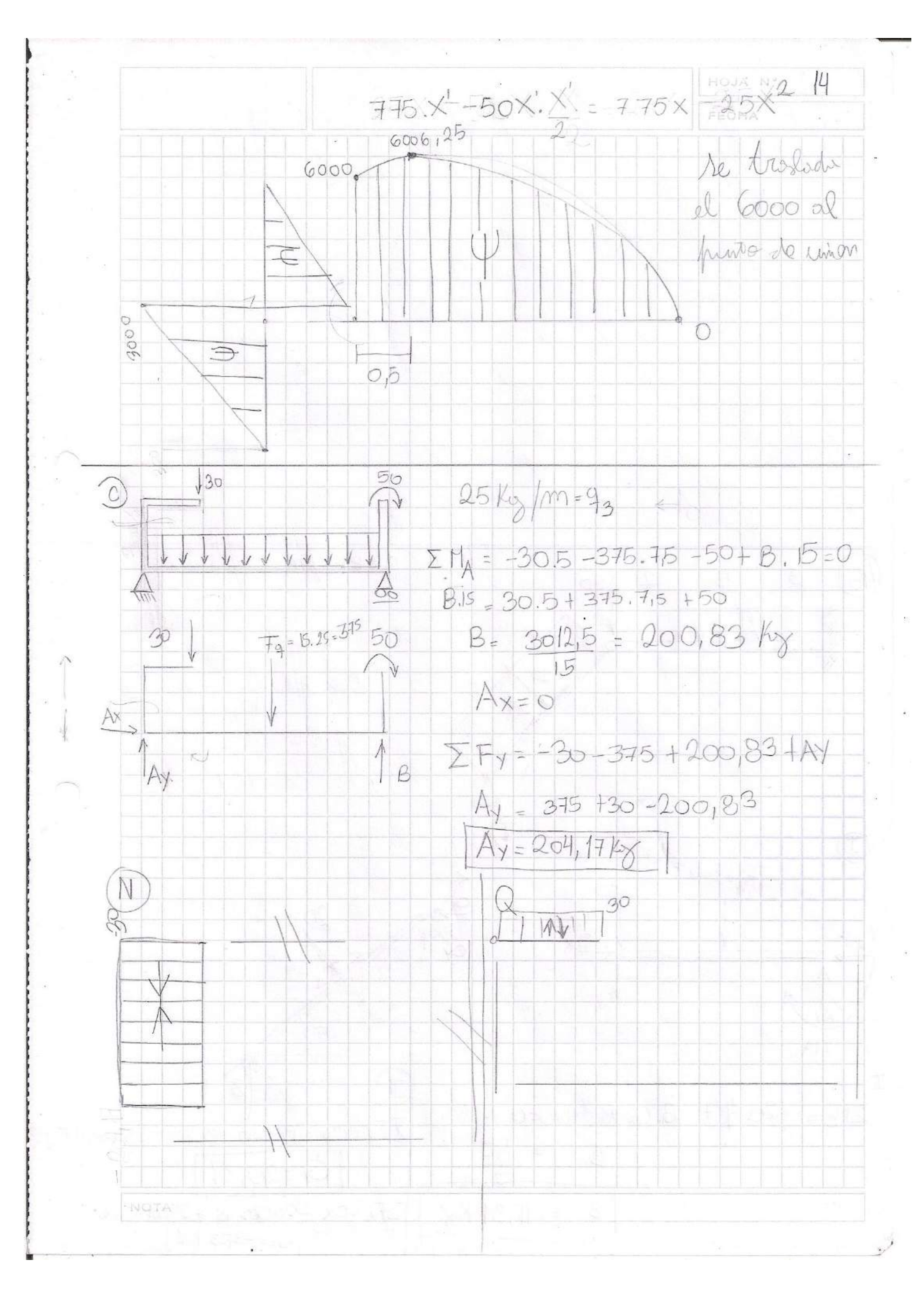
$A_y = 800 - 775$

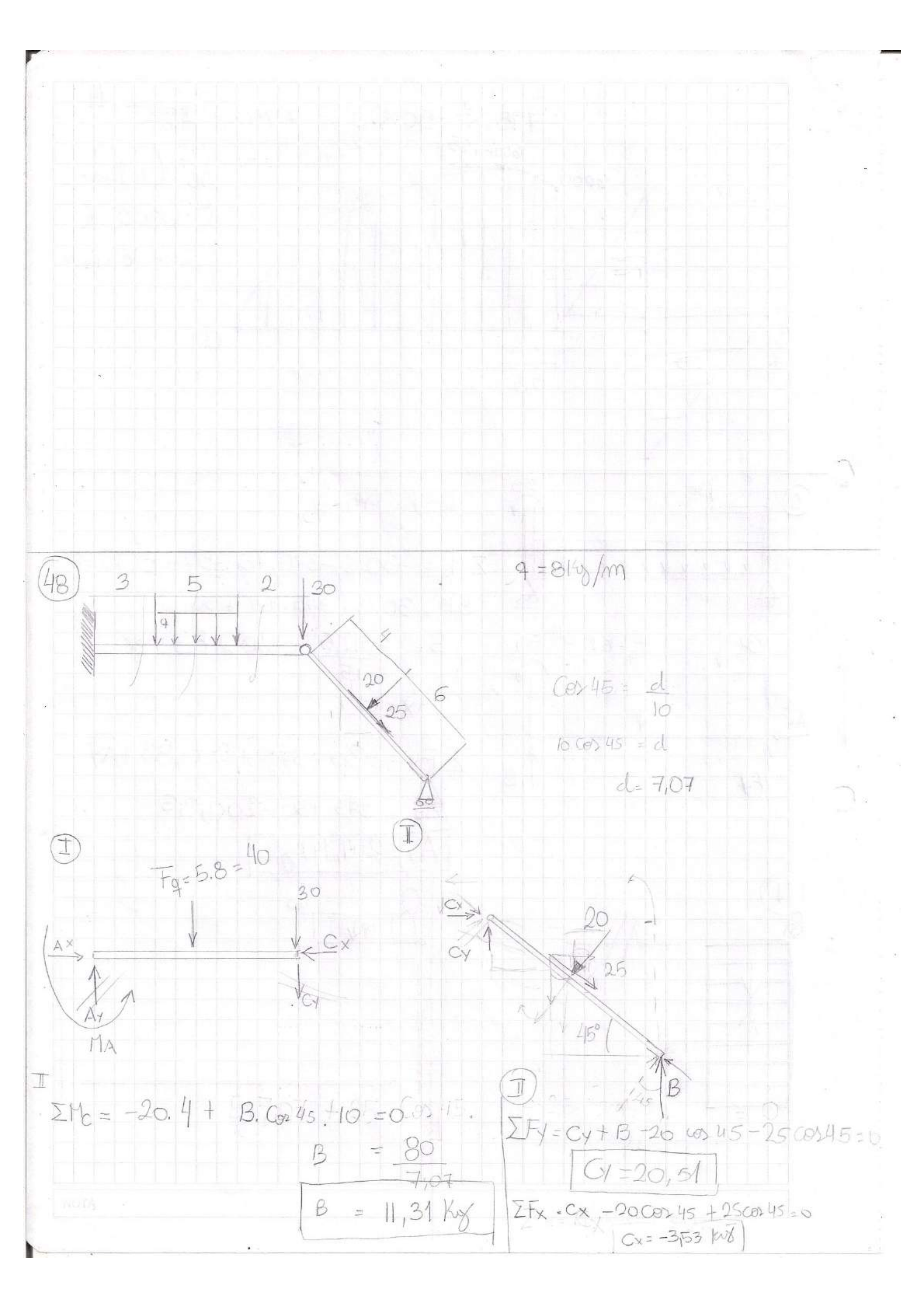
$\boxed{A_y = 25 \text{ Kg}}$

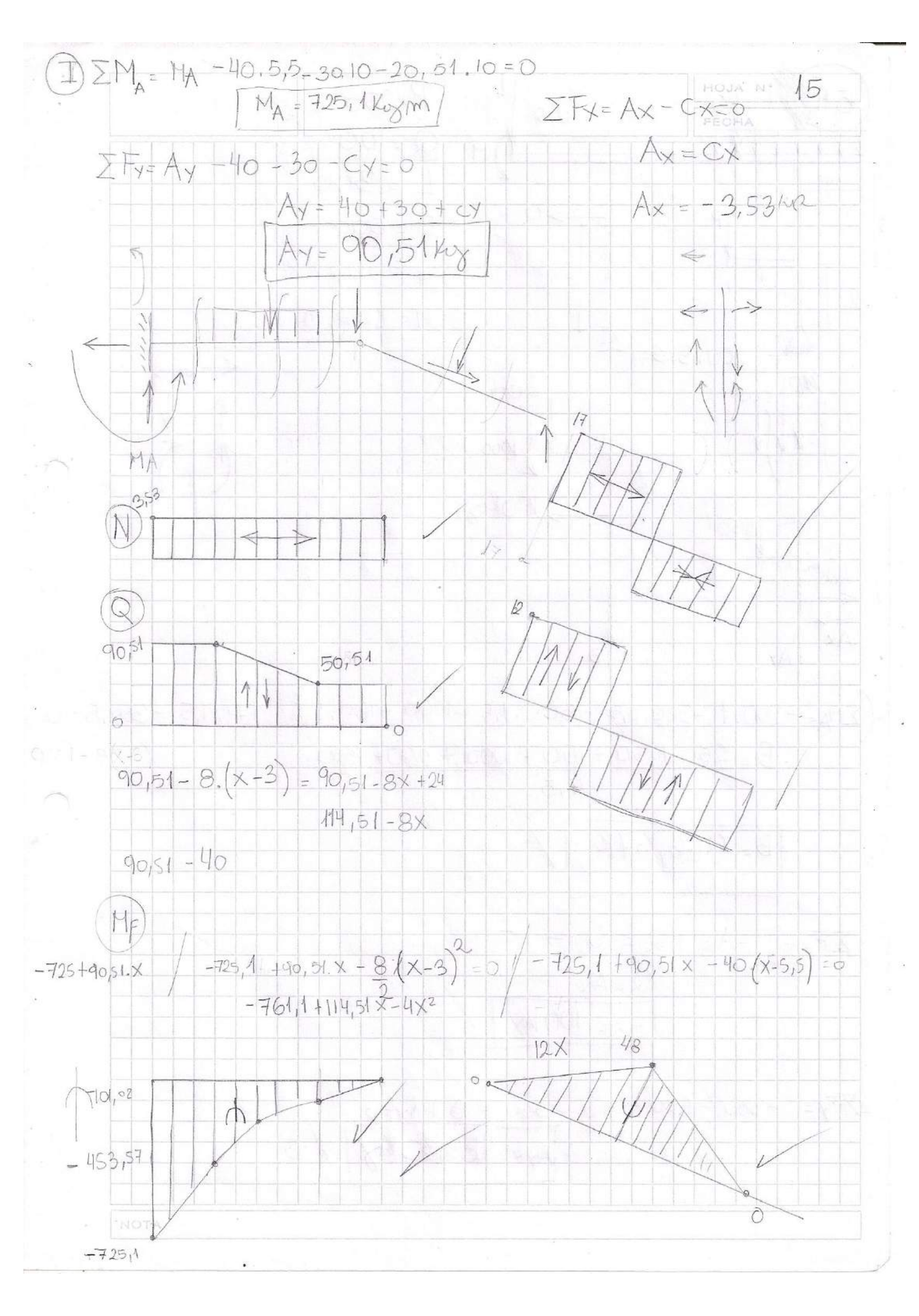
$\boxed{A_x = 300 \text{ Kg}}$

$-775 + 50X = 0$

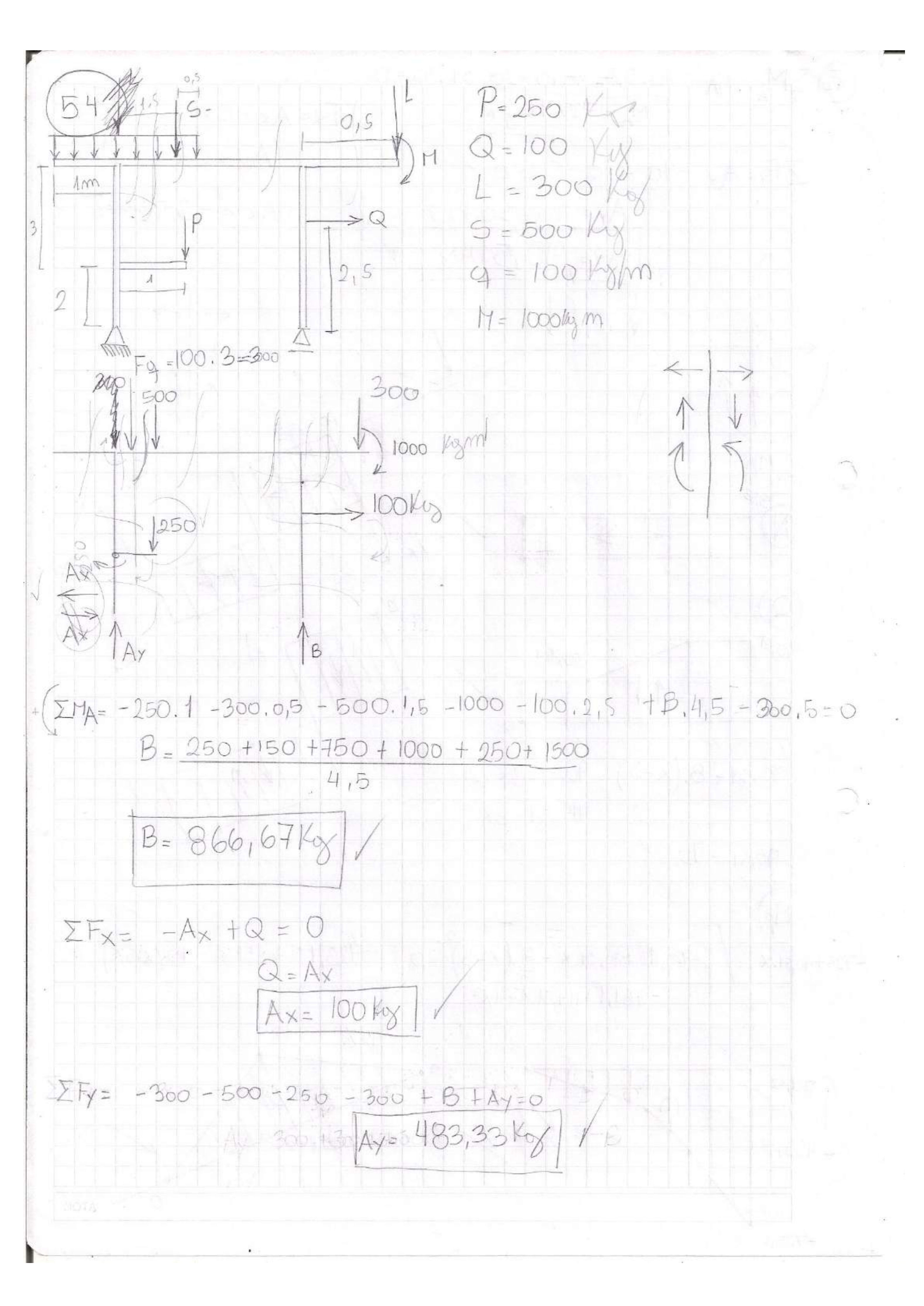
$X = \frac{775}{50} = 15{,}5$


HOJA N° 14
FECHA
$775 \cdot X' - 50X' \cdot \frac{X'}{2} = 775X - 25X^2$
6006,25
6000
se traslada el 6000 al punto de union
3000
0,5
0
(c)
30
50
25 Kg/m = q_3
$\Sigma M_A = -30.5 - 375.7{,}5 - 50 + B.15 = 0$
$B.15 = 30.5 + 375.7{,}5 + 50$
$B = \frac{3012{,}5}{15} = 200{,}83$ Kg
$F_q = 15.25 = 375$
Ax
Ay
B
$A_x = 0$
$\Sigma F_y = -30 - 375 + 200{,}83 + A_Y$
$A_y = 375 + 30 - 200{,}83$
$A_y = 204{,}17$ Kg
(N)
-30
Q
30
NOTA


48
3
5
2
30
q
q = 8 Kg/m
4
20
25
6
Cos 45 = d / 10
10 Cos 45 = d
d = 7,07
I
II
Fq = 5.8 = 40
30
Ax
Cx
Ay
MA
Cy
20
25
45°
B
II
ΣMc = -20.4 + B. Cos 45 . 10 = 0
B = 80 / 7,07
B = 11,31 Kg
II
ΣFy = Cy + B - 20 cos 45 - 25 cos 45 = 0
Cy = 20,51
ΣFx . Cx - 20 Cos 45 + 25 Cos 45 = 0
Cx = -3,53 Kg



HOJA N° 15
FECHA
(I) ΣMA = MA − 40.5,5 − 30.10 − 20,51.10 = 0
MA = 725,1 Kg m
ΣFx = Ax − Cx = 0
Ax = Cx
Ax = −3,53
ΣFy = Ay − 40 − 30 − Cy = 0
Ay = 40 + 30 + Cy
Ay = 90,51 Kg
MA
N
3,53
Q
90,51
50,51
0
0
90,51 − 8.(x−3) = 90,51 − 8x + 24
114,51 − 8x
90,51 − 40
MF
−725 + 90,51.x
−725,1 + 90,51.x − 8/2 (x−3)² = 0
−761,1 + 114,51 x − 4x²
−725,1 + 90,51 x − 40 (x−5,5) = 0
101,02
−453,57
−725,1
12x
48
0
0
NOTA



$P = 250$ Kg

$Q = 100$ Kg

$L = 300$ Kg

$S = 500$ Kg

$q = 100$ Kg/m

$M = 1000$ Kg m

$$\sum M_A = -250 . 1 - 300 . 0,5 - 500 . 1,5 - 1000 - 100 . 2,5 + B . 4,5 - 300 . 5 = 0$$

$$B = \frac{250 + 150 + 750 + 1000 + 250 + 1500}{4,5}$$

$$\boxed{B = 866,67 \text{ Kg}}$$

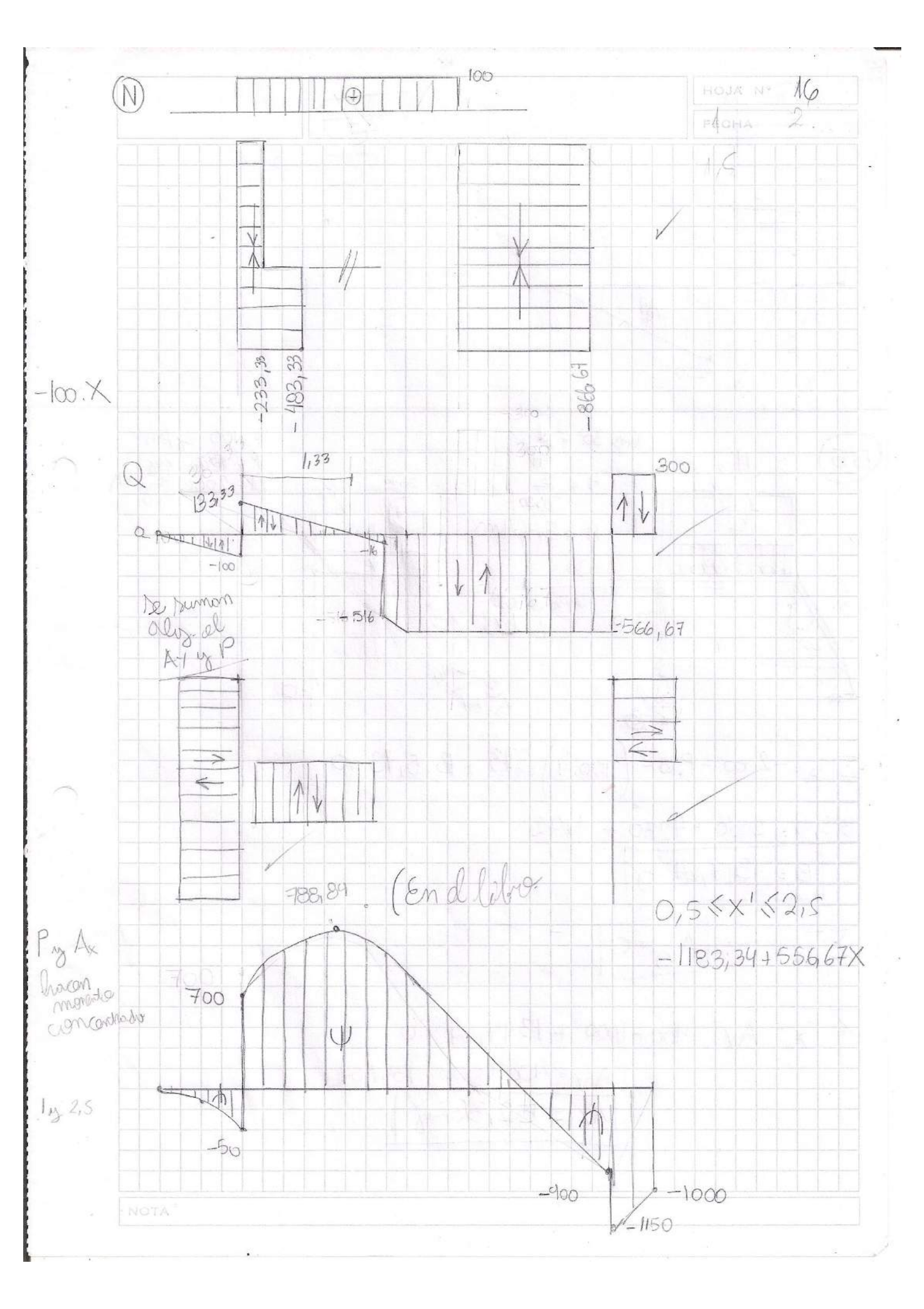
$$\sum F_x = -A_x + Q = 0$$

$$Q = A_x$$

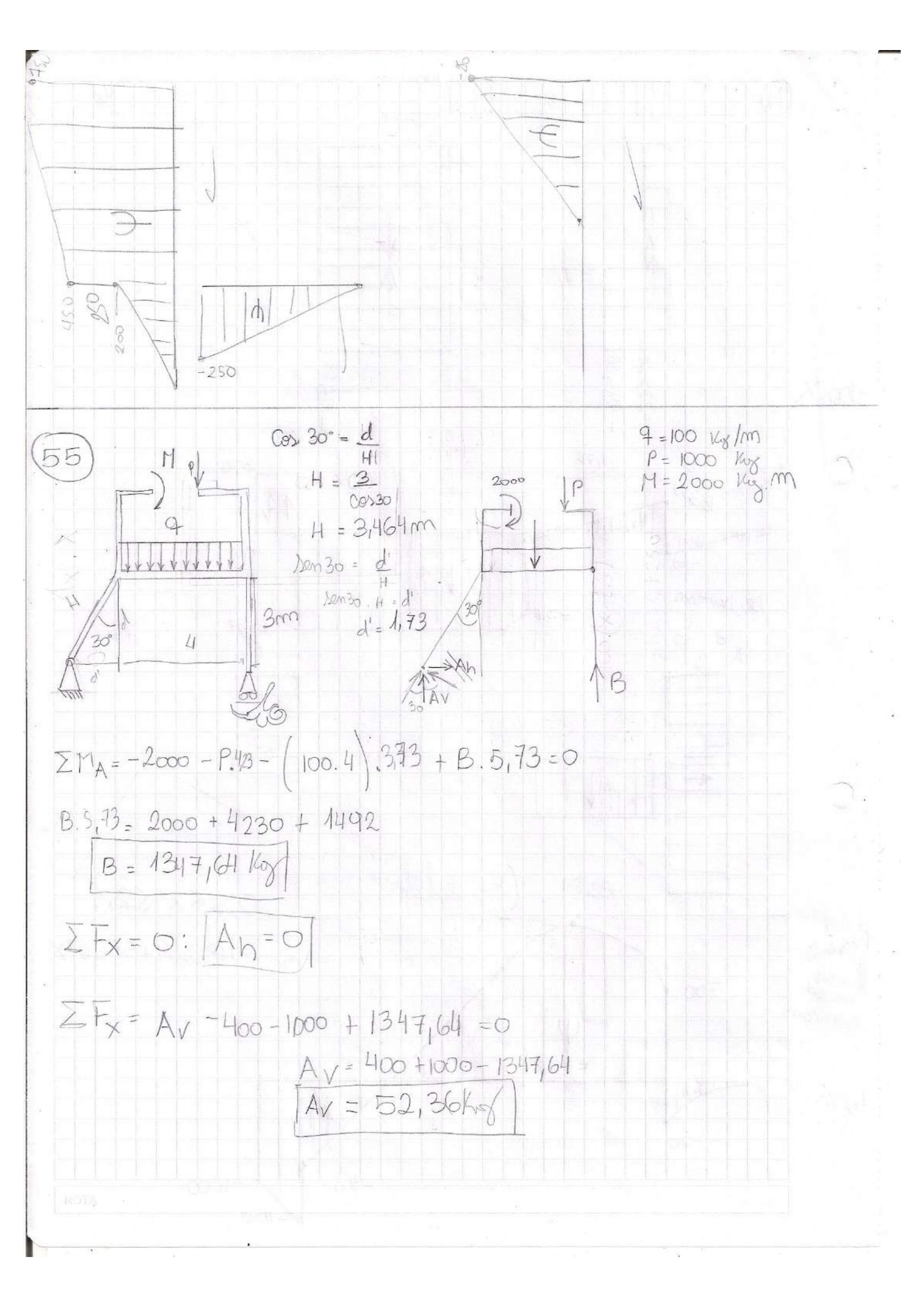
$$\boxed{A_x = 100 \text{ Kg}}$$

$$\sum F_y = -300 - 500 - 250 - 300 + B + A_y = 0$$

$$\boxed{A_y = 483,33 \text{ Kg}}$$



N
100
HOJA N° 16
FECHA 1 2.
1,5
-233,33
-483,33
-866,67
-100.X
Q
1,33
133,33
300
-100
-16
-514,516
-566,67
De suman alg. el Ay y P
788,84
(En el libro
0,5 ≤ X' ≤ 2,5
-1183,34 + 566,67X
P y Ax hacen momento concentrado
700
1 y 2,5
-50
-900
-1000
-1150
NOTA



(55)

$\cos 30° = \frac{d}{H}$

$H = \frac{3}{\cos 30}$

$H = 3{,}464 \, m$

$\operatorname{sen} 30 = \frac{d'}{H}$

$\operatorname{sen} 30 \cdot H = d'$

$d' = 1{,}73$

$q = 100 \ Kg/m$

$P = 1000 \ Kg$

$M = 2000 \ Kg \cdot m$

$\Sigma M_A = -2000 - P \cdot 4{,}23 - (100 \cdot 4) \cdot 3{,}73 + B \cdot 5{,}73 = 0$

$B \cdot 5{,}73 = 2000 + 4230 + 1492$

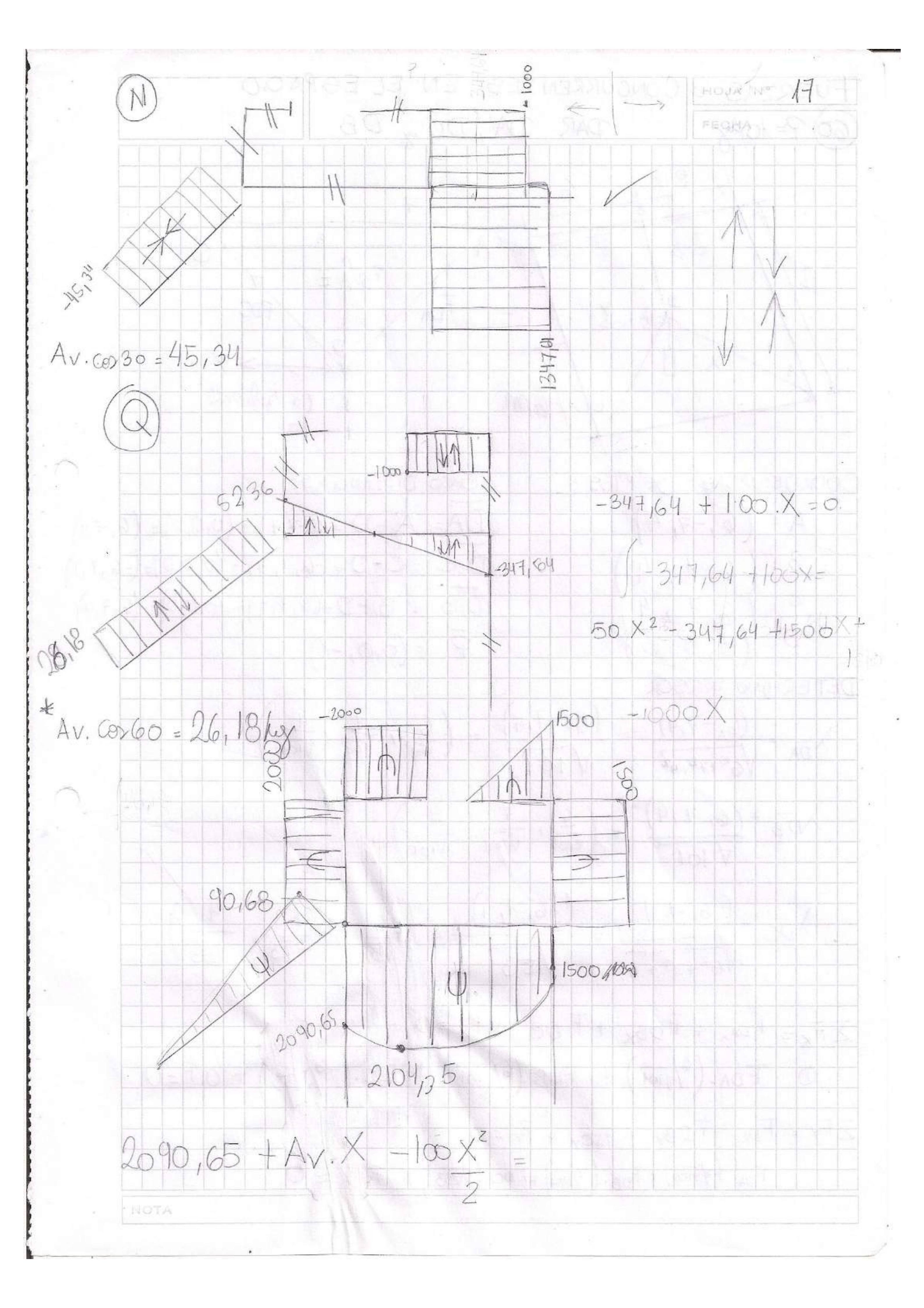
$B = 1347{,}64 \ Kg$

$\Sigma F_x = 0: \ A_h = 0$

$\Sigma F_x = A_v - 400 - 1000 + 1347{,}64 = 0$

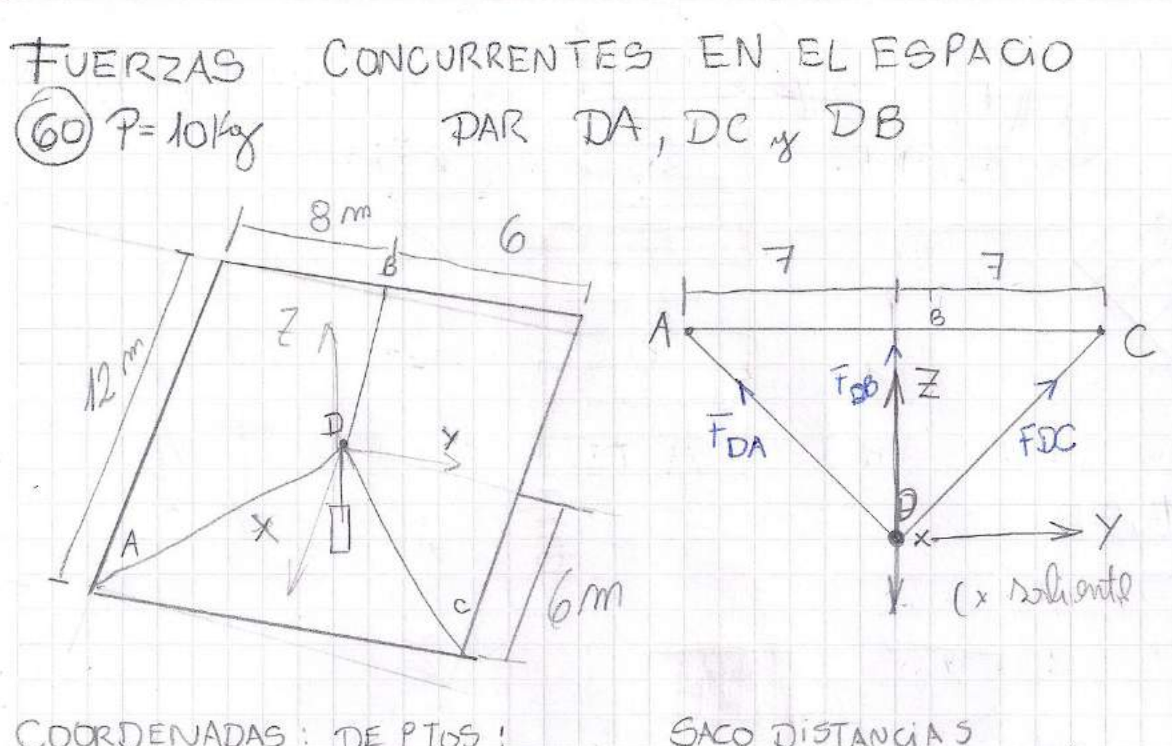
$A_v = 400 + 1000 - 1347{,}64$

$A_v = 52{,}36 \ Kg$


HOJA N° 17
FECHA
N
-1000
-45,34
1347,01
Av. cos 30 = 45,34
Q
-1000
5236
-347,64
26,18
$-347,64 + 100 . X = 0$
$\int -347,64 + 100X =$
$50 X^2 - 347,64 + 1500 X +$
* Av. cos 60 = 26,18 kg
-2000
2000
1500
-1000 X
1500
90,68
1500
2090,65
2104,35
$2090,65 + Av . X - 100 \frac{X^2}{2} =$
NOTA

FUERZAS CONCURRENTES EN EL ESPACIO

(60) $P = 10\,kg$ PAR DA, DC y DB



COORDENADAS: DE PTOS:

$A = (6, -7, 4)$

$B = (-6, 1, 4)$

$C = (6, 7, 4)$

$D = (0, 0, 0)$

SACO DISTANCIAS

$\overline{DA} = A - D = (6,-7,4) - (0,0,0) = (6,-7,4)$

$\overline{DC} = C - D = (-6,1,4) - (0,0,0) = (-6,1,4)$

$\overline{DB} = B - D = (6,7,4) - (0,0,0) = (6,7,4)$

$\overline{P} = (0,0,-1)$

DETERMINO VERSOR

$$\lambda_{\overline{DA}} = \frac{(6,-7,4)}{\sqrt{6^2+7^2+4^2}} = \frac{(6,-7,4)}{\sqrt{101}} = \left(\frac{6}{\sqrt{101}}, \frac{-7}{\sqrt{101}}, \frac{4}{\sqrt{101}}\right)$$

$$\lambda_{\overline{DB}} = \frac{(6,7,4)}{\sqrt{101}} = \left(\frac{6}{\sqrt{101}}, \frac{7}{\sqrt{101}}, \frac{4}{\sqrt{101}}\right)$$

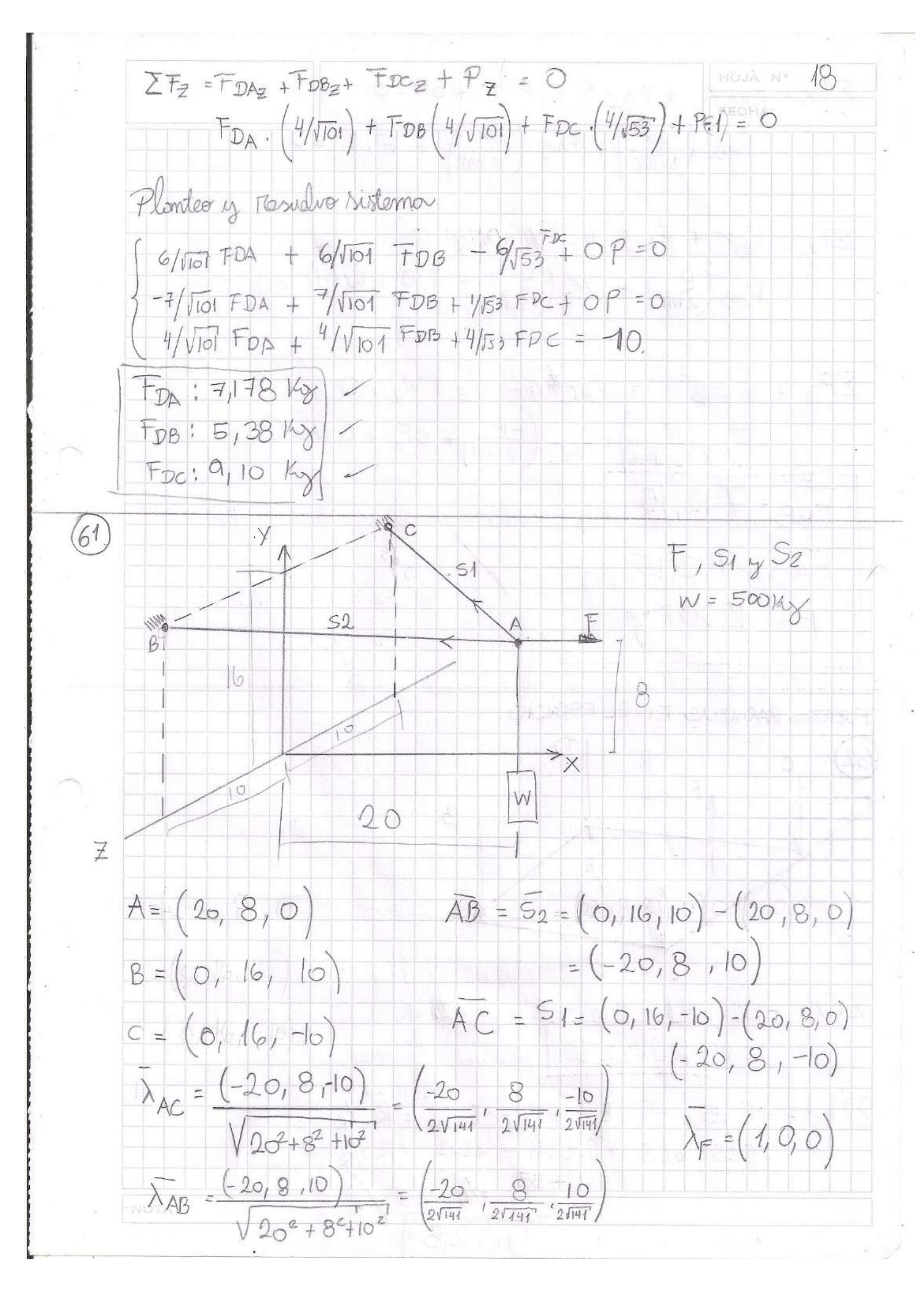
$$\lambda_{\overline{DC}} = \frac{(-6,1,4)}{\sqrt{6^2+1^2+4^2}} = \frac{(-6,1,4)}{\sqrt{53}} = \left(\frac{-6}{\sqrt{53}}, \frac{1}{\sqrt{53}}, \frac{4}{\sqrt{53}}\right)$$

$$\Sigma F_x = F_{DA_x} + F_{DB_x} + F_{DC_x} + P_x = 0$$

① $F_{DA} \cdot (6/\sqrt{101}) + F_{DB} \cdot (6/\sqrt{101}) + F_{DC} \cdot (-6/\sqrt{53}) + 0 \cdot P = 0$

$$\Sigma F_y = F_{DA_y} + F_{DB_y} + F_{DC_y} + P_y = 0$$

$F_{DA} \cdot (-7/\sqrt{101}) + F_{DB} \cdot (7/\sqrt{101}) + F_{DC} \cdot (1/\sqrt{53}) + P \cdot 0 = 0$



HOJA N° 18

$$\Sigma F_Z = F_{DA_Z} + F_{DB_Z} + F_{DC_Z} + P_Z = 0$$

$$F_{DA} \cdot \left(4/\sqrt{101}\right) + F_{DB}\left(4/\sqrt{101}\right) + F_{DC} \cdot \left(4/\sqrt{53}\right) + P \cdot 1 = 0$$

Planteo y resuelvo sistema

$$\begin{cases} 6/\sqrt{101}\, F_{DA} + 6/\sqrt{101}\, F_{DB} - 6/\sqrt{53}\, F_{DC} + 0P = 0 \\ -7/\sqrt{101}\, F_{DA} + 7/\sqrt{101}\, F_{DB} + 1/\sqrt{53}\, F_{DC} + 0P = 0 \\ 4/\sqrt{101}\, F_{DA} + 4/\sqrt{101}\, F_{DB} + 4/\sqrt{53}\, F_{DC} = 10 \end{cases}$$

F_{DA} : 7,178 Kg ✓

F_{DB} : 5,38 Kg ✓

F_{DC} : 9,10 Kg ✓

(61)

F, S_1 y S_2

W = 500 Kg

$A = (20, 8, 0)$

$B = (0, 16, 10)$

$C = (0, 16, -10)$

$\overline{AB} = \overline{S_2} = (0, 16, 10) - (20, 8, 0) = (-20, 8, 10)$

$\overline{AC} = S_1 = (0, 16, -10) - (20, 8, 0)$
$(-20, 8, -10)$

$$\bar{\lambda}_{AC} = \frac{(-20, 8, -10)}{\sqrt{20^2+8^2+10^2}} = \left(\frac{-20}{2\sqrt{141}}, \frac{8}{2\sqrt{141}}, \frac{-10}{2\sqrt{141}}\right)$$

$$\bar{\lambda}_F = (1, 0, 0)$$

$$\bar{\lambda}_{AB} = \frac{(-20, 8, 10)}{\sqrt{20^2+8^2+10^2}} = \left(\frac{-20}{2\sqrt{141}}, \frac{8}{2\sqrt{141}}, \frac{10}{2\sqrt{141}}\right)$$

$$\Sigma F_x = F_{AB}{}^x + F_{AC}{}^x + F_x + 0W = 0$$

$$F_{AB} \cdot \left(\frac{-20}{2\sqrt{141}}\right) + F_{AC}\left(\frac{-20}{2\sqrt{141}}\right) + F \cdot 1 = 0$$

$$\Sigma F_y = F_{AB}{}^y + F_{AC}{}^y + F_y + W_y = 0$$

$$F_{AB}\left(\frac{8}{2\sqrt{141}}\right) + F_{AC}\left(\frac{8}{\sqrt{141}}\right) + F \cdot 0 + W(-1) = 0$$

$$\Sigma F_z = F_{AB}{}^z + F_{AC}{}^z + F_z + W_z = 0$$

$$F_{AB}\left(\frac{10}{2\sqrt{141}}\right) + F_{AC} \cdot \left(\frac{-10}{2\sqrt{141}}\right) + 0F_z + 0W = 0$$

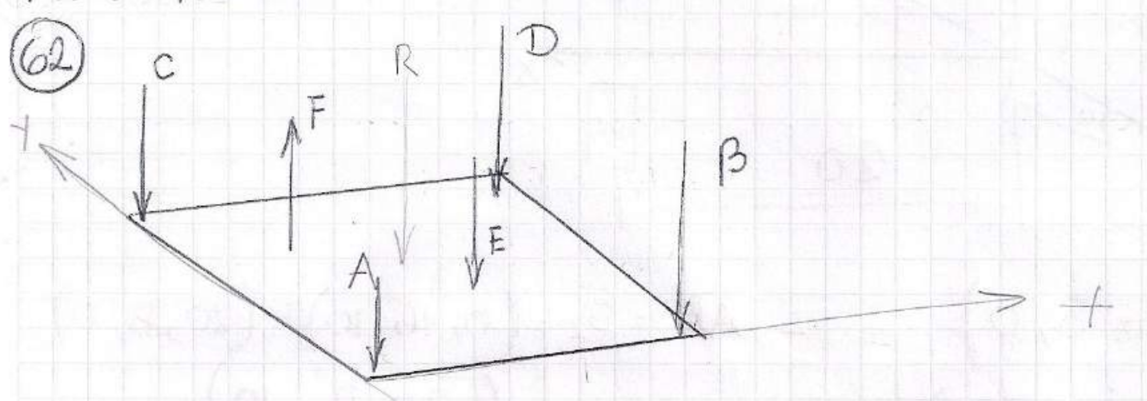
$F_{AB} = 742{,}15$ Kg

$F_{AC} = 742{,}15$ Kg

$F = 1250$ Kg

FUERZAS PARALELAS EN EL ESPACIO

(62)



$$\Sigma F_y = -5t - 4t - 5t - 6t - 4t + 2t = R$$

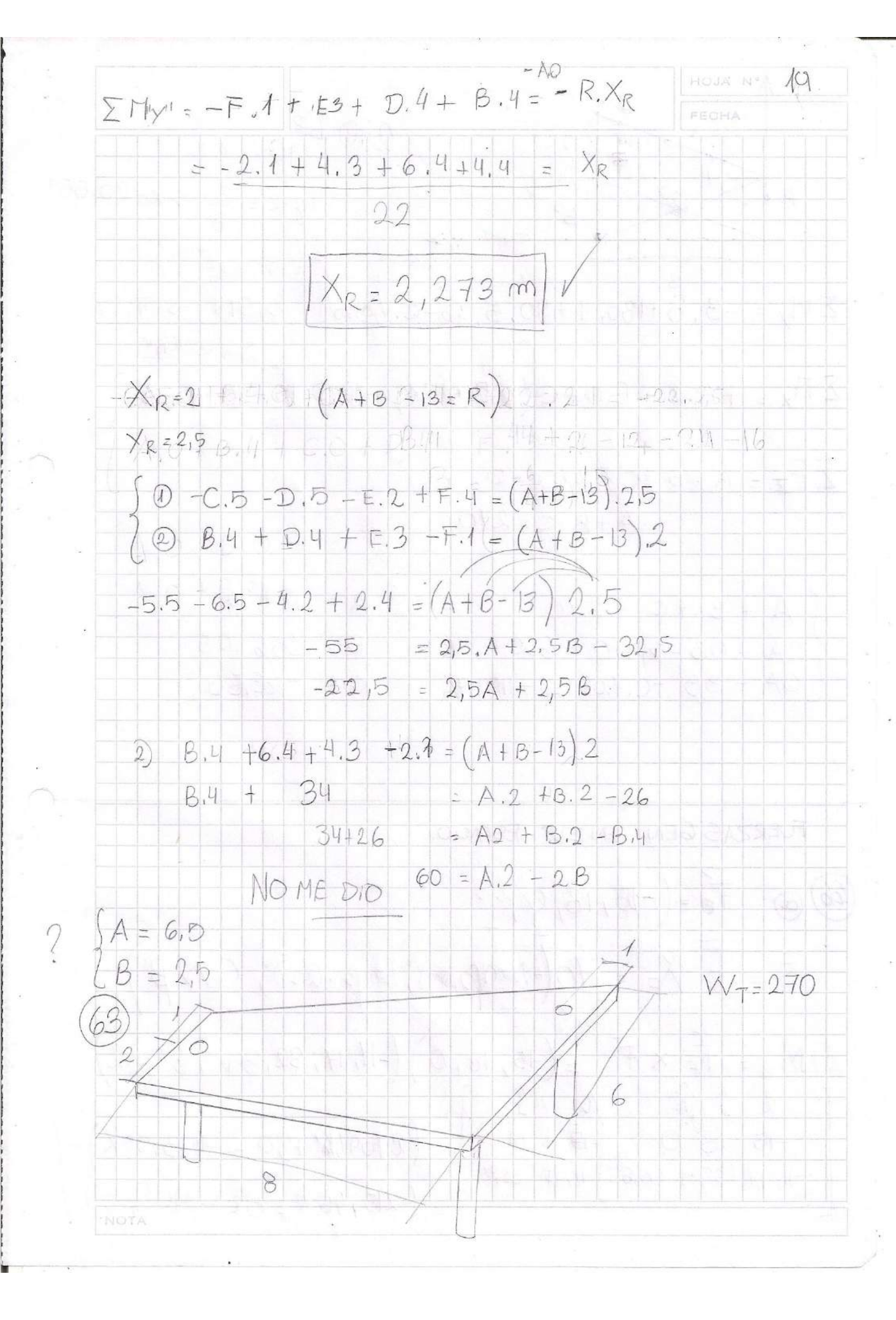
$$R = -22\,t$$

$$\Sigma M_{x''} = -C \cdot 5 - D \cdot 5 + F \cdot 4 - E \cdot 2 + A \cdot 0 + B \cdot 0 = R \cdot Y_R$$

$$-5t \cdot 5 - 6t \cdot 5 + 2 \cdot t \cdot 4 - 4t \cdot 2 = R \cdot Y_R$$

$$\frac{-55}{-22} = Y_R$$

$$Y_R = 2{,}5\,m$$



HOJA N° 19

FECHA

$\sum M_{y'} = -F.1 + E3 + D.4 + B.4 = -R.X_R$ (-A0)

$= \frac{-2.1 + 4.3 + 6.4 + 4.4}{22} = X_R$

$X_R = 2,273\ m$ ✓

~~$X_R = 2$~~ $(A + B - 13 = R)$

$X_R = 2,5$

① $-C.5 - D.5 - E.2 + F.4 = (A+B-13).2,5$

② $B.4 + D.4 + E.3 - F.1 = (A+B-13).2$

$-5.5 - 6.5 - 4.2 + 2.4 = (A+B-13)\ 2.5$

$-55 = 2,5.A + 2,5B - 32,5$

$-22,5 = 2,5A + 2,5B$

2) $B.4 + 6.4 + 4.3 - 2.1 = (A+B-13)2$

$B.4 + 34 = A.2 + B.2 - 26$

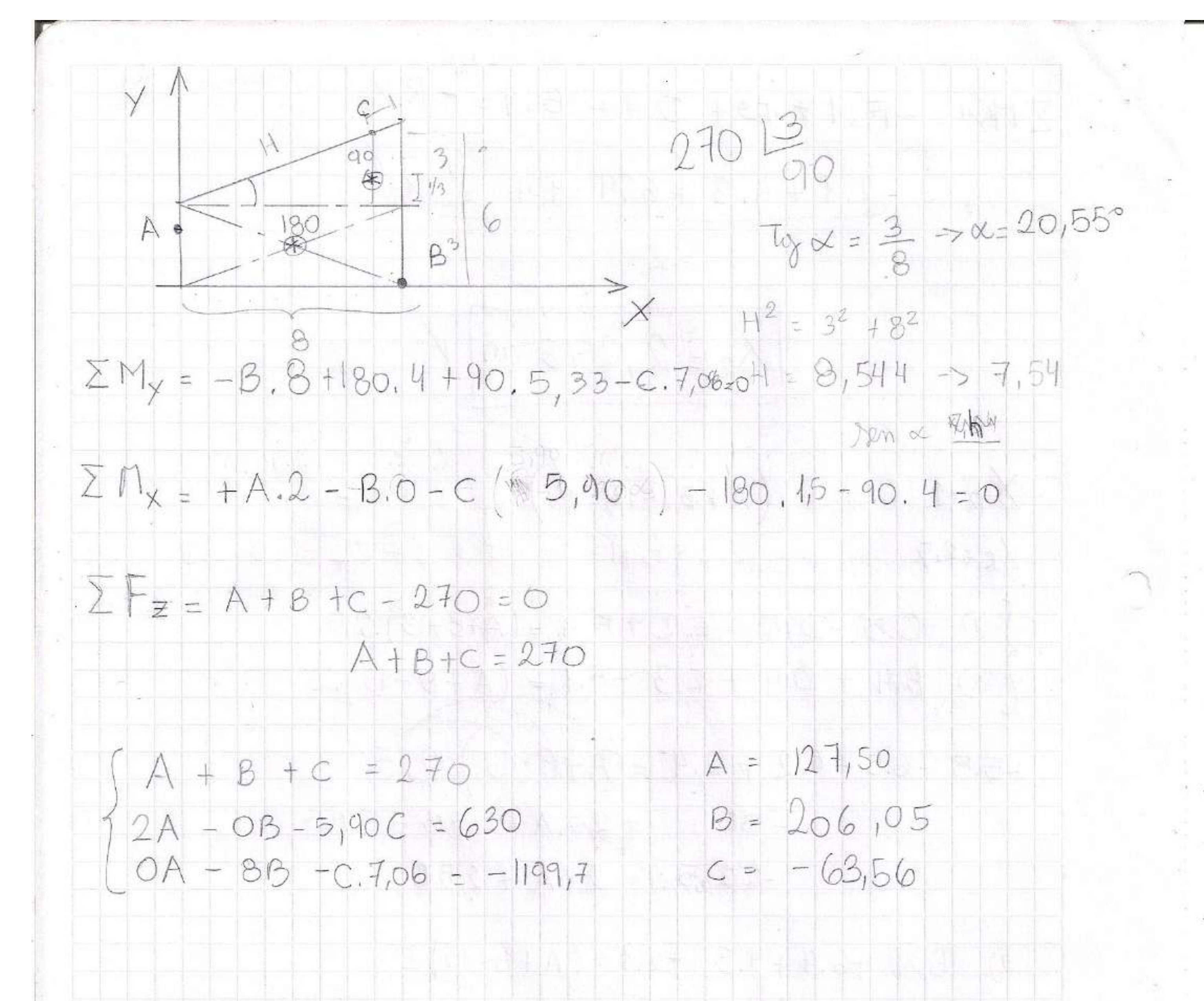
$34+26 = A2 + B.2 - B.4$

NO ME DIO $60 = A.2 - 2B$

? $A = 6,5$, $B = 2,5$

(63)

NOTA



$$270 \,\underline{|3}\; 90$$

$$Tg\,\alpha = \frac{3}{8} \rightarrow \alpha = 20{,}55°$$

$$H^2 = 3^2 + 8^2$$

$$\Sigma M_y = -B.8 + 180.4 + 90.5{,}33 - C.7{,}06 = 0 \quad H = 8{,}544 \rightarrow 7{,}54$$

sen α

$$\Sigma M_x = +A.2 - B.0 - C(5{,}90) - 180.1{,}5 - 90.4 = 0$$

$$\Sigma F_z = A + B + C - 270 = 0$$

$$A + B + C = 270$$

$$\begin{cases} A + B + C = 270 \\ 2A - 0B - 5{,}90C = 630 \\ 0A - 8B - C.7{,}06 = -1199{,}7 \end{cases}$$

$A = 127{,}50$
$B = 206{,}05$
$C = -63{,}56$

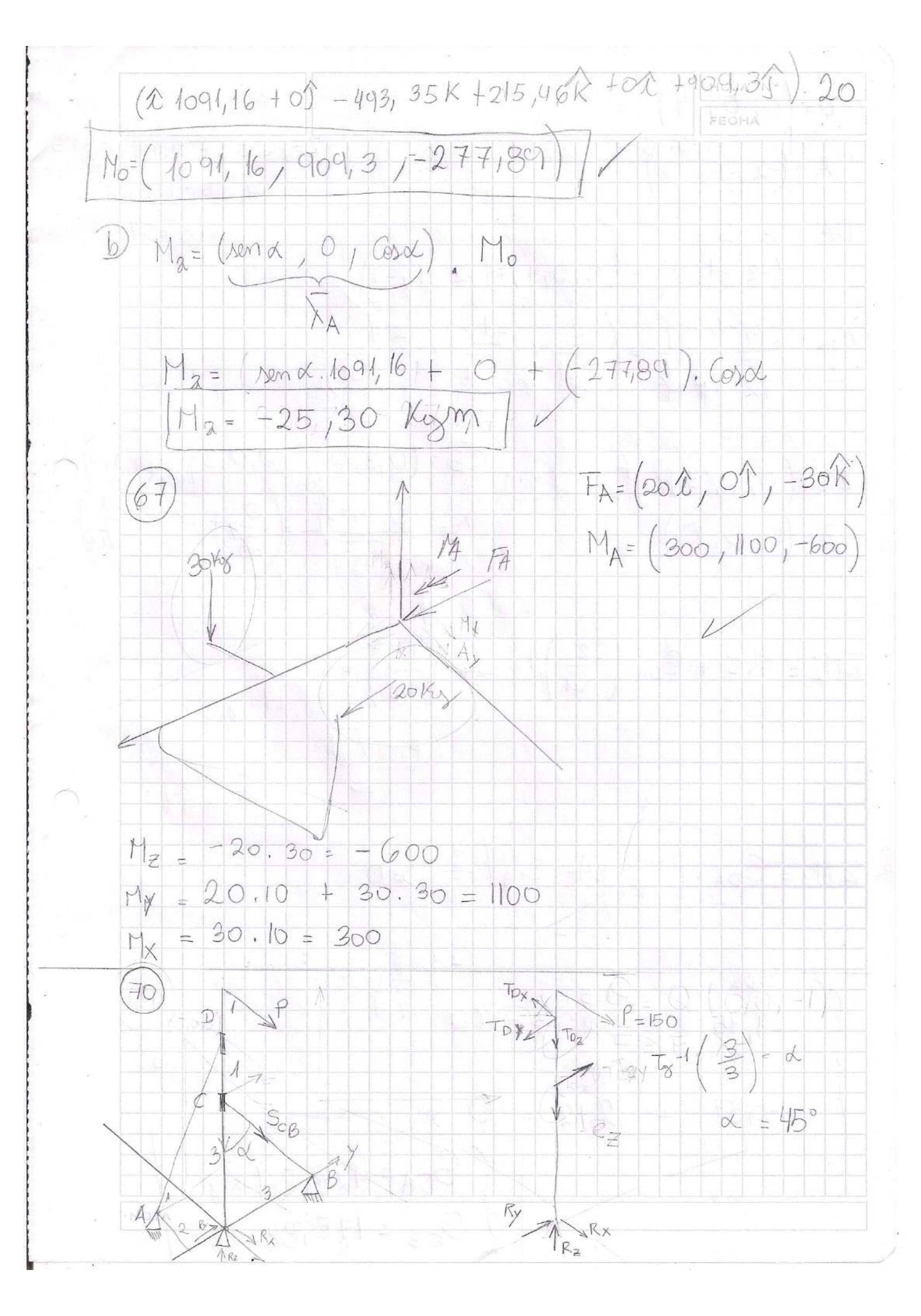
FUERZAS GEN. EN EL ESPACIO.

(66) (a) $\vec{r}_0 = (-15, 18, 0)$

$$\bar{F} = \bar{F}\,\lambda_F = 70(-sen\beta . sen\gamma,\ sen\beta . cos\gamma,\ cos\beta)$$

$$M_o = \bar{r}_F \times \bar{F} = (-15, 18, 0)(-11{,}97;\ 32{,}89;\ 60{,}62)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} & \hat{i} & \hat{j} \\ -15 & 18 & 0 & -15 & 18 \\ -11{,}97 & 32{,}89 & 60{,}62 & -11{,}97 & 32{,}89 \end{bmatrix} = (\hat{i}\,1091{,}16 + \hat{j}\,0 - -493{,}35\hat{k}) - (-215{,}46\hat{k} + 0\hat{i} - 909{,}3\hat{j})$$



$(\hat{\imath}\, 1091{,}16 + 0\hat{\jmath} - 493{,}35\hat{k} + 215{,}46\hat{k} + 0\hat{\imath} + 909{,}3\hat{\jmath})\cdot 20$

FECHA

$$\boxed{M_0 = (1091{,}16,\ 909{,}3,\ -277{,}89)}$$ ✓

b) $M_x = \underbrace{(\operatorname{sen}\alpha,\ 0,\ \cos\alpha)}_{\bar{X}_A} \cdot M_0$

$M_x = \operatorname{sen}\alpha \cdot 1091{,}16 + 0 + (-277{,}89)\cdot\cos\alpha$

$$\boxed{M_x = -25{,}30\ \text{Kgm}}$$ ✓

(67)

$F_A = (20\hat{\imath},\ 0\hat{\jmath},\ -30\hat{k})$

$M_A = (300,\ 1100,\ -600)$ ✓

$M_z = -20 \cdot 30 = -600$

$M_y = 20 \cdot 10 + 30 \cdot 30 = 1100$

$M_x = 30 \cdot 10 = 300$

(70)

$Tg^{-1}\left(\frac{3}{3}\right) = \alpha$

$\alpha = 45°$

$D = (0, 0, 4)$

$A = (-2, -1, 0)$

$\Sigma F_x = 150 - 187{,}5 + R_x = 0$

$187{,}5 - 150 = R_x$

$R_x = 37{,}5$

$DA = A - D$

$(-2, -1, 0) - (0, 0, 4) = (-2, -1, -4)$

$$\lambda_{DA} = \frac{(-2, -1, -4)}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 4^2}} = \left(\frac{-2}{\sqrt{21}}, \frac{-1}{\sqrt{21}}, \frac{-4}{\sqrt{21}}\right)$$

$C = (0, 0, 3)$

$B = (0, 3, 0)$

$\overline{CB} = (0, 3, 0) - (0, 0, 3) = (0, 3, -3)$

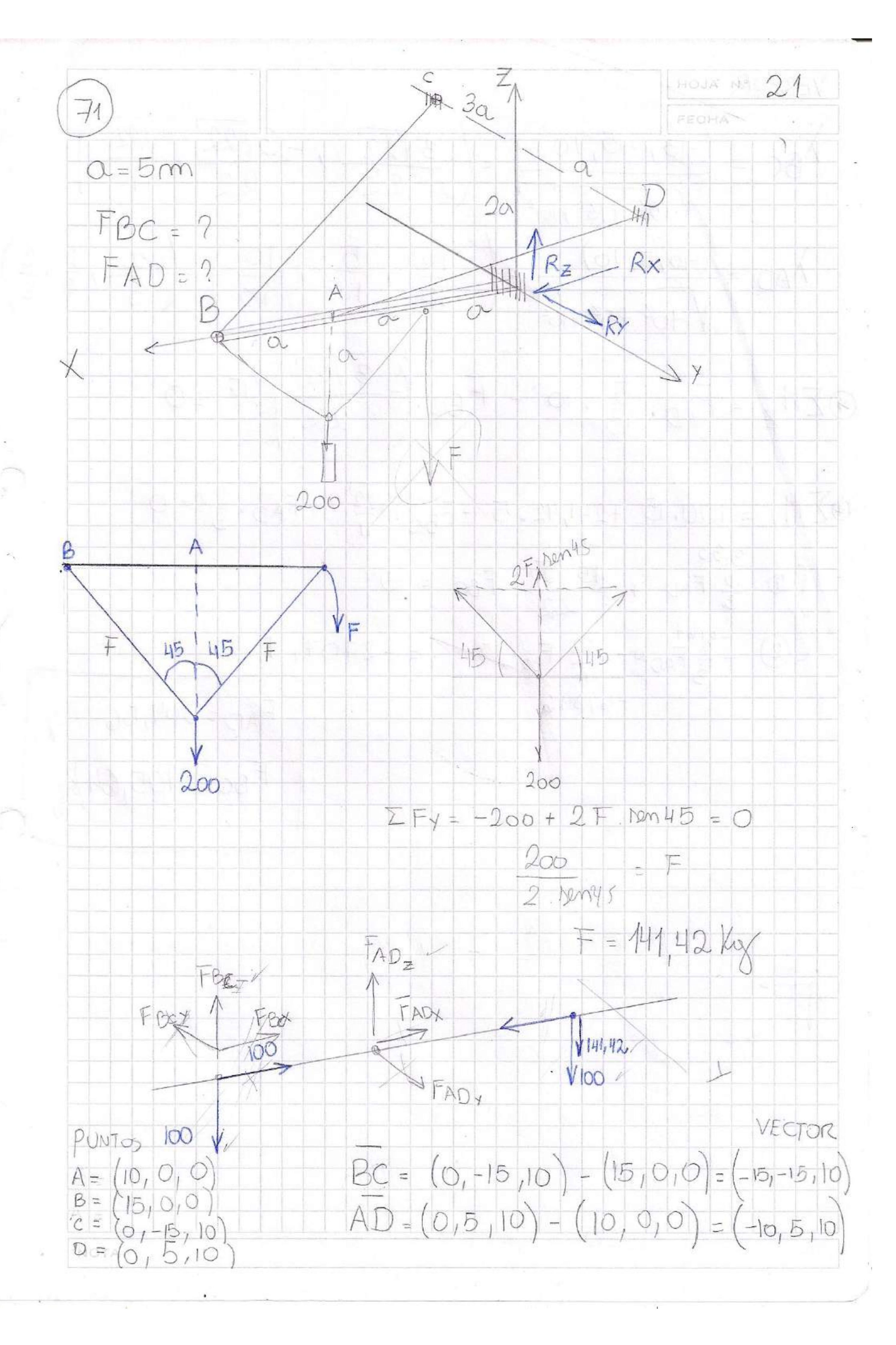
$$\lambda_{CB} = \frac{(0, 3, -3)}{\sqrt{9+9}} = \left(\frac{0}{\sqrt{18}}, +\frac{3}{\sqrt{18}}, \frac{-3}{\sqrt{18}}\right)$$

$$\Sigma M_y = P.5 + S_{DA} \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{21}}\right).4 + S_{CB}\left(\frac{0}{\sqrt{18}}\right) = 0$$

$$\Sigma M_x = S_{DA} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{21}}\right).4 + S_{CB}\left(\frac{3}{\sqrt{18}}\right).3 = 0$$

$$\begin{cases} \quad S_{DA} \qquad S_{CB} \\ -1{,}75 + 0 = -750 \\ -0{,}87 + 2{,}12 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_{DA} = 428{,}57 \text{ Kg} \\ S_{CB} = 175{,}88 \text{ Kg} \end{cases}$$



71
HOJA Nº 21
FECHA
a = 5m
FBC = ?
FAD = ?
C
3a
Z
a
D
2a
Rz
Rx
Ry
A
B
a
a
a
a
X
Y
200
F
B
A
F
F
45
45
F
200
2F sen45
45
45
200
ΣFy = -200 + 2F sen45 = 0
200 / 2 sen45 = F
F = 141,42 Kg
FBCz
FBCy
FBCx
100
FADz
FADx
FADy
141,42
100
PUNTOS 100
A = (10, 0, 0)
B = (15, 0, 0)
C = (0, -15, 10)
D = (0, 5, 10)
VECTOR
BC = (0, -15, 10) - (15, 0, 0) = (-15, -15, 10)
AD = (0, 5, 10) - (10, 0, 0) = (-10, 5, 10)

VERSOR

$$\lambda_{BC} = \frac{(-15, -15, 10)}{\sqrt{15^2 + 15^2 + 10^2}} = \left(-\frac{3\sqrt{22}}{22}, -\frac{3\sqrt{22}}{22}, \frac{\sqrt{22}}{11}\right)$$

$$\lambda_{AD} = \frac{(-10, 5, 10)}{\sqrt{-10^2 + 5^2 + 10^2}} = \left(-\frac{10}{15}, \frac{5}{15}, \frac{10}{15}\right) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$(*)\ \sum M_Z = F_{AD} \cdot \frac{5}{15} \cdot 10 - F_{BC} \cdot \left(-\frac{3\sqrt{22}}{22}\right) \cdot 15 = 0$$

$$(*)\ \sum M_y = 100 \cdot 15 + 241{,}42 \cdot 5 - F_{BC} \cdot \frac{\sqrt{22}}{11} - F_{AD} \cdot \frac{2}{3} \cdot 10 = 0$$

$$\begin{cases} (1)\ \overset{3{,}33}{\frac{10}{3}} F_{AD} + \overset{-9{,}60}{\frac{45\sqrt{22}}{22}} F_{BC} = 0 \\ (2)\ \overset{-6{,}67}{-\frac{2}{3}} F_{AD} \cdot 10 - \underset{-6{,}396}{\frac{\sqrt{22}}{11}} F_{BC} \cdot 15 = -2707{,}1 \end{cases}$$

$F_{AD} = 304{,}56$ Kg

$F_{BC} = 105{,}64$ Kg

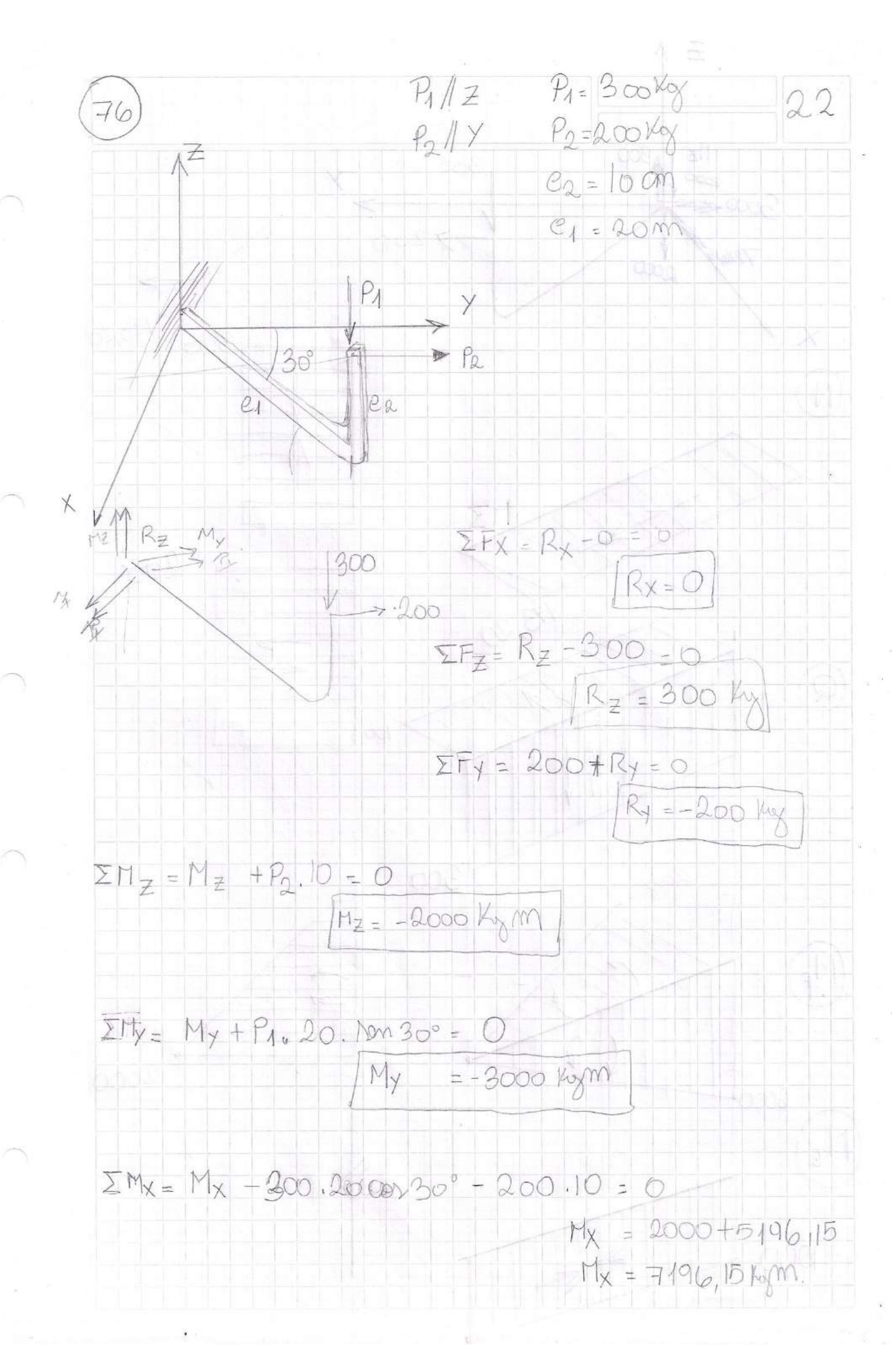
$100\hat{i} + 100\hat{j} = (100, 100)$

100

100

45

200



(76)

22

$P_1 \parallel Z$ $\quad P_1 = 300\,Kg$

$P_2 \parallel Y$ $\quad P_2 = 200\,Kg$

$e_2 = 10\,cm$

$e_1 = 20\,m$

$\Sigma F_X = R_X - 0 = 0$

$R_X = 0$

$\Sigma F_Z = R_Z - 300 = 0$

$R_Z = 300\,Kg$

$\Sigma F_Y = 200 + R_Y = 0$

$R_Y = -200\,Kg$

$\Sigma M_Z = M_Z + P_2 . 10 = 0$

$M_Z = -2000\,Kg\,m$

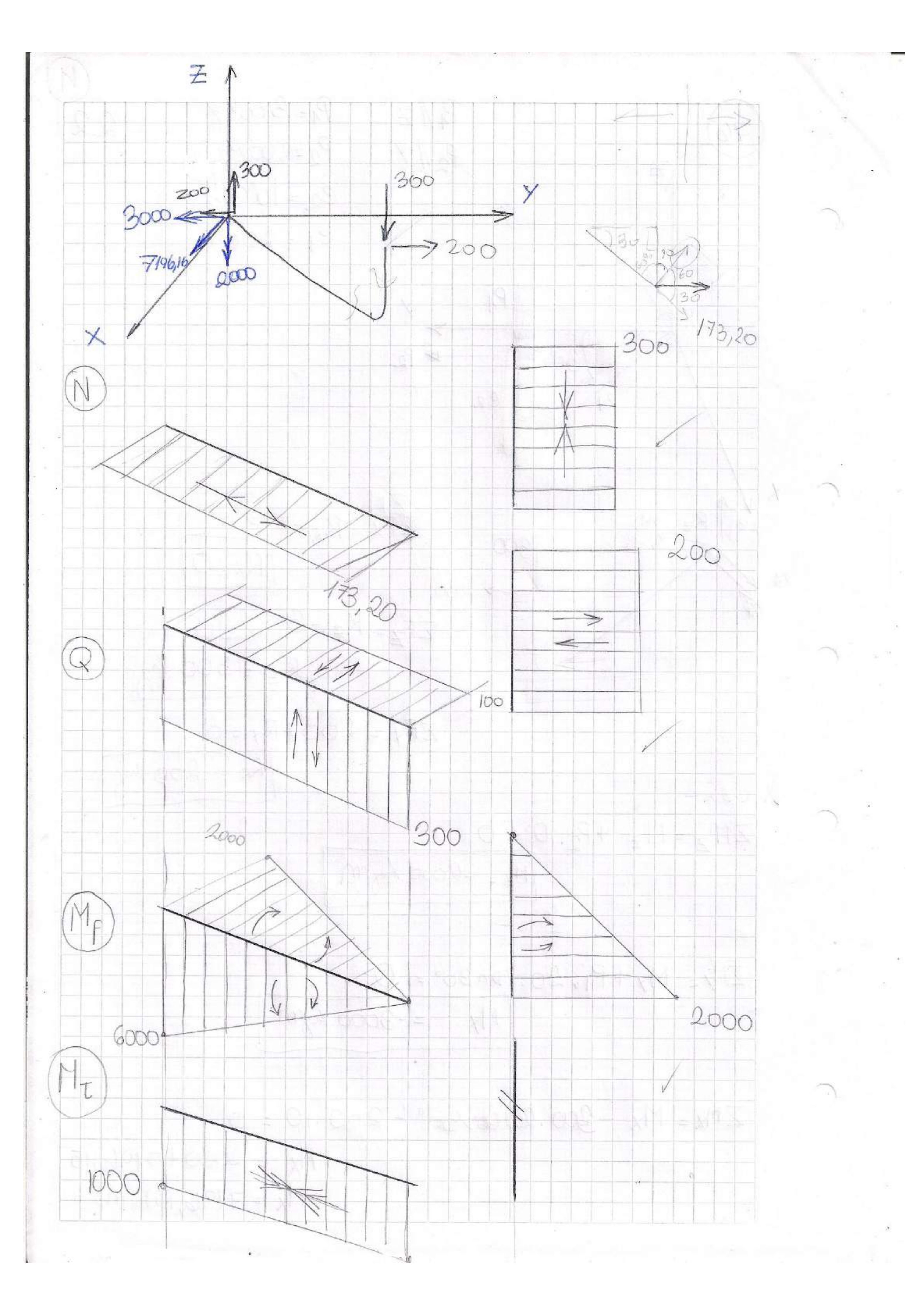
$\Sigma M_Y = M_Y + P_1 . 20 . \operatorname{sen} 30° = 0$

$M_Y = -3000\,Kg\,m$

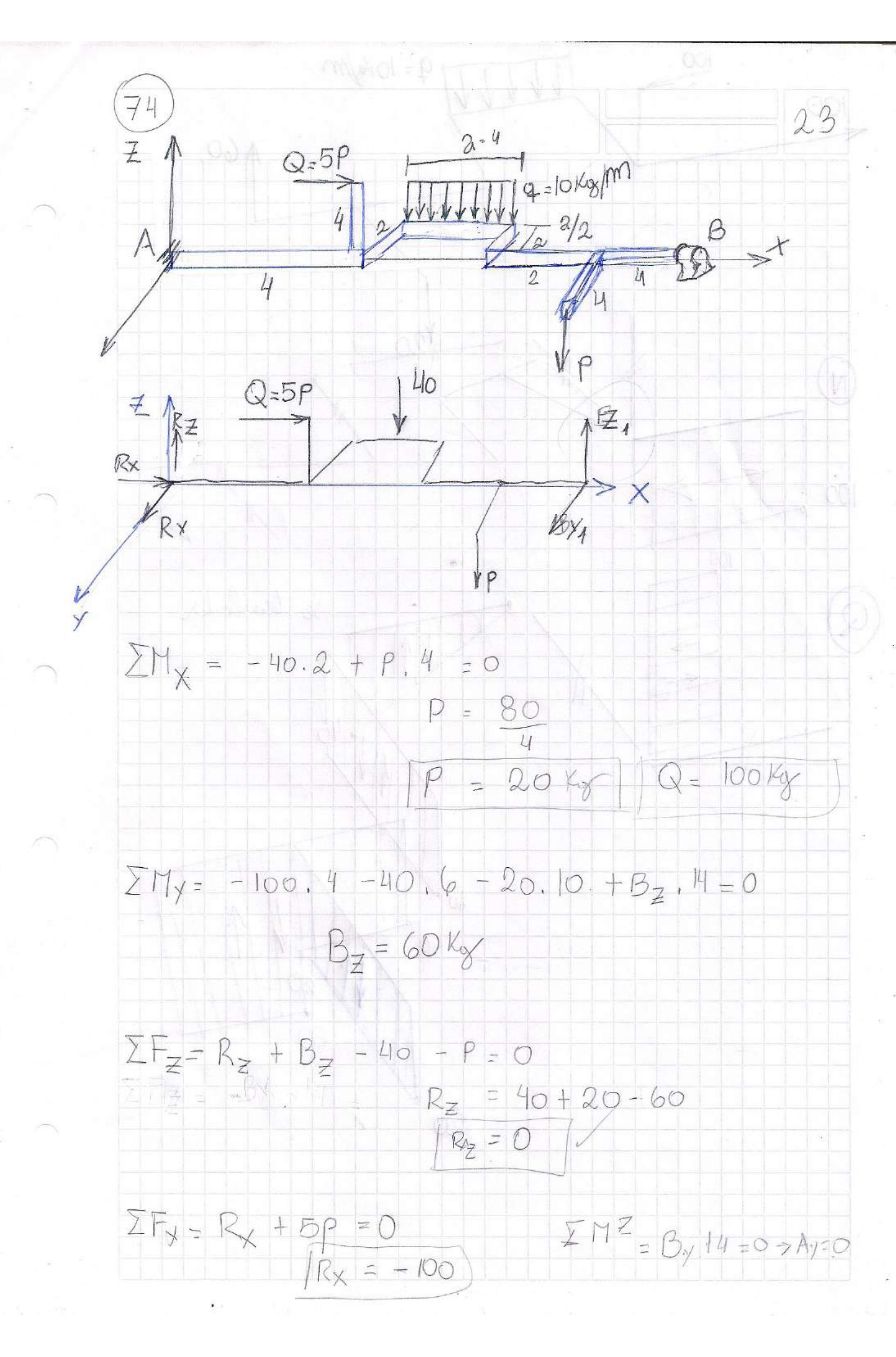
$\Sigma M_X = M_X - 300 . 20 \cos 30° - 200 . 10 = 0$

$M_X = 2000 + 5196{,}15$

$M_X = 7196{,}15\,Kg\,m.$



Z
Y
X
300
300
200
3000
200
7196,16
2000
300
173,20
N
Q
173,20
200
100
300
2000
M_F
6000
2000
M_t
1000



$\sum M_X = -40 \cdot 2 + P \cdot 4 = 0$

$P = \frac{80}{4}$

$P = 20\ Kg$ | $Q = 100\ Kg$

$\sum M_Y = -100 \cdot 4 - 40 \cdot 6 - 20 \cdot 10 + B_Z \cdot 14 = 0$

$B_Z = 60\ Kg$

$\sum F_Z = R_Z + B_Z - 40 - P = 0$

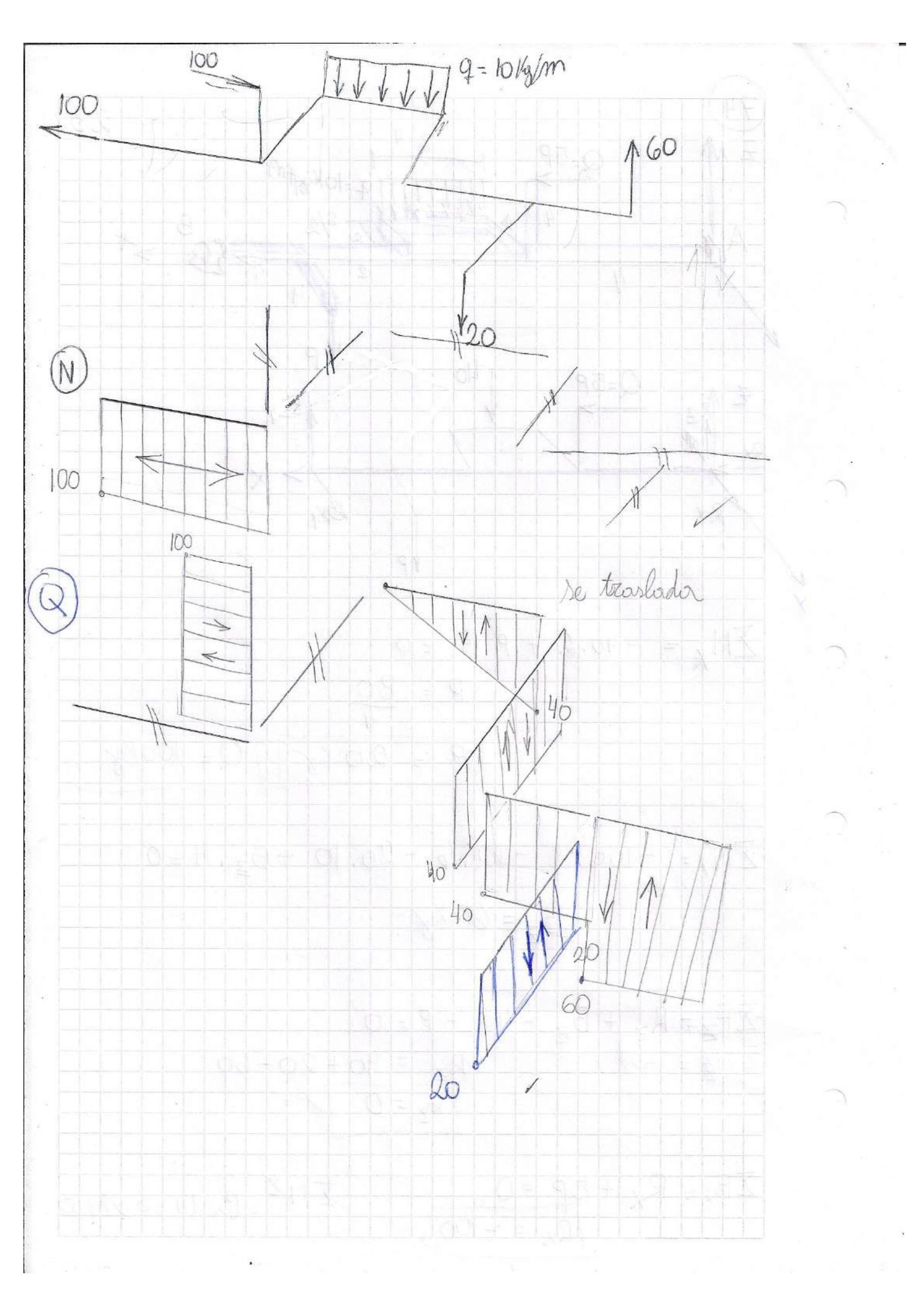
$R_Z = 40 + 20 - 60$

$R_{AZ} = 0$

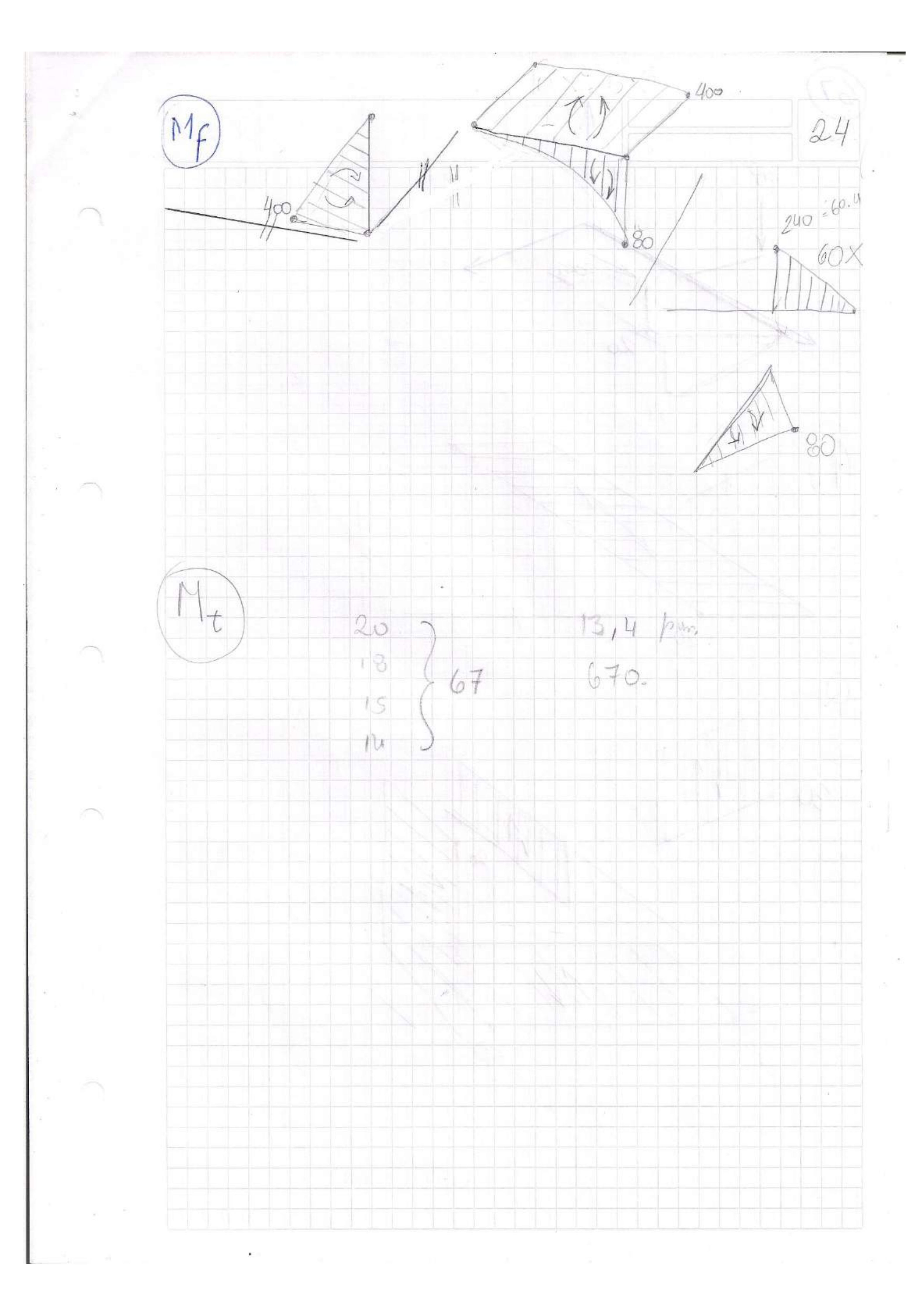
$\sum F_X = R_X + 5P = 0$

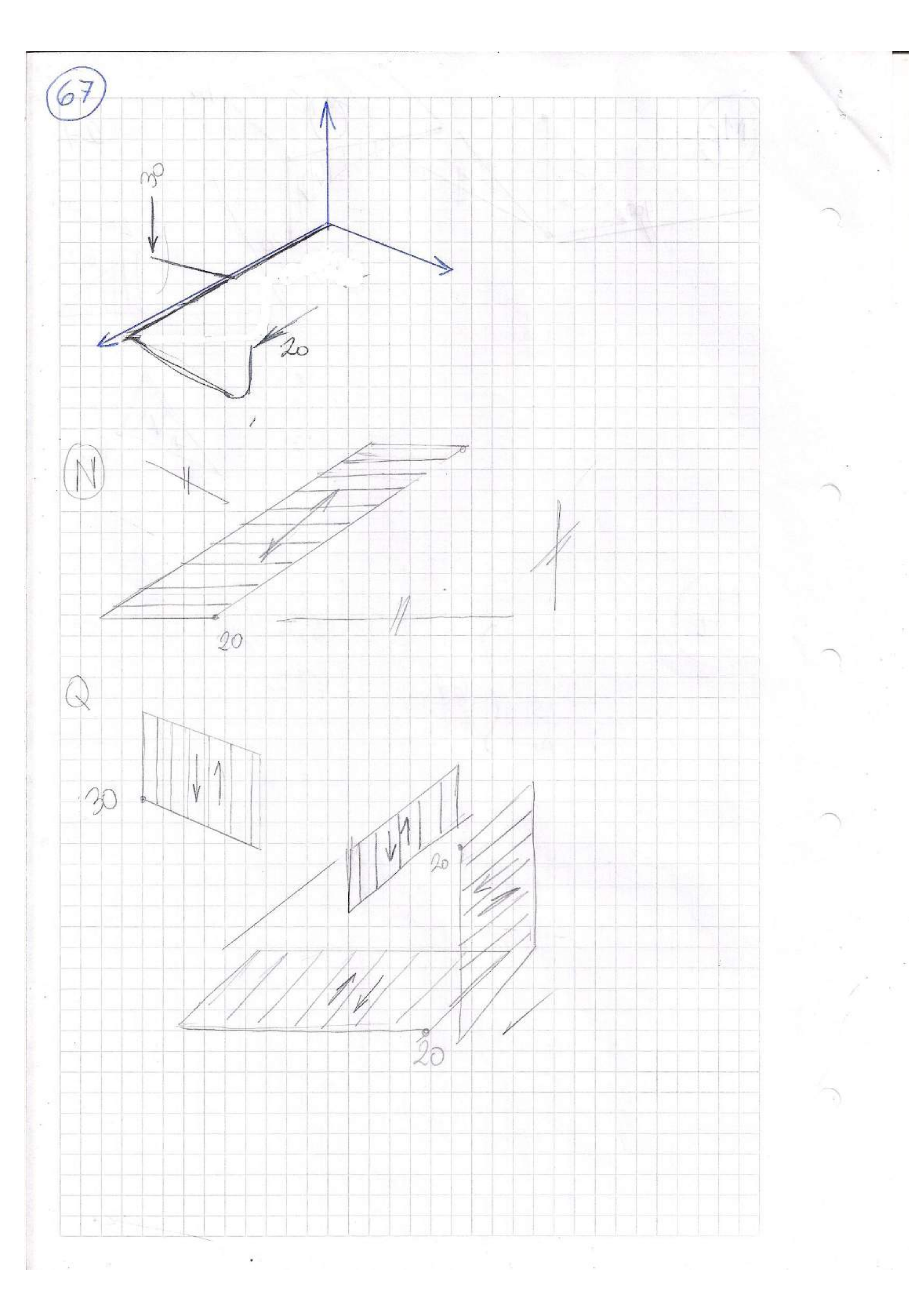
$R_X = -100$

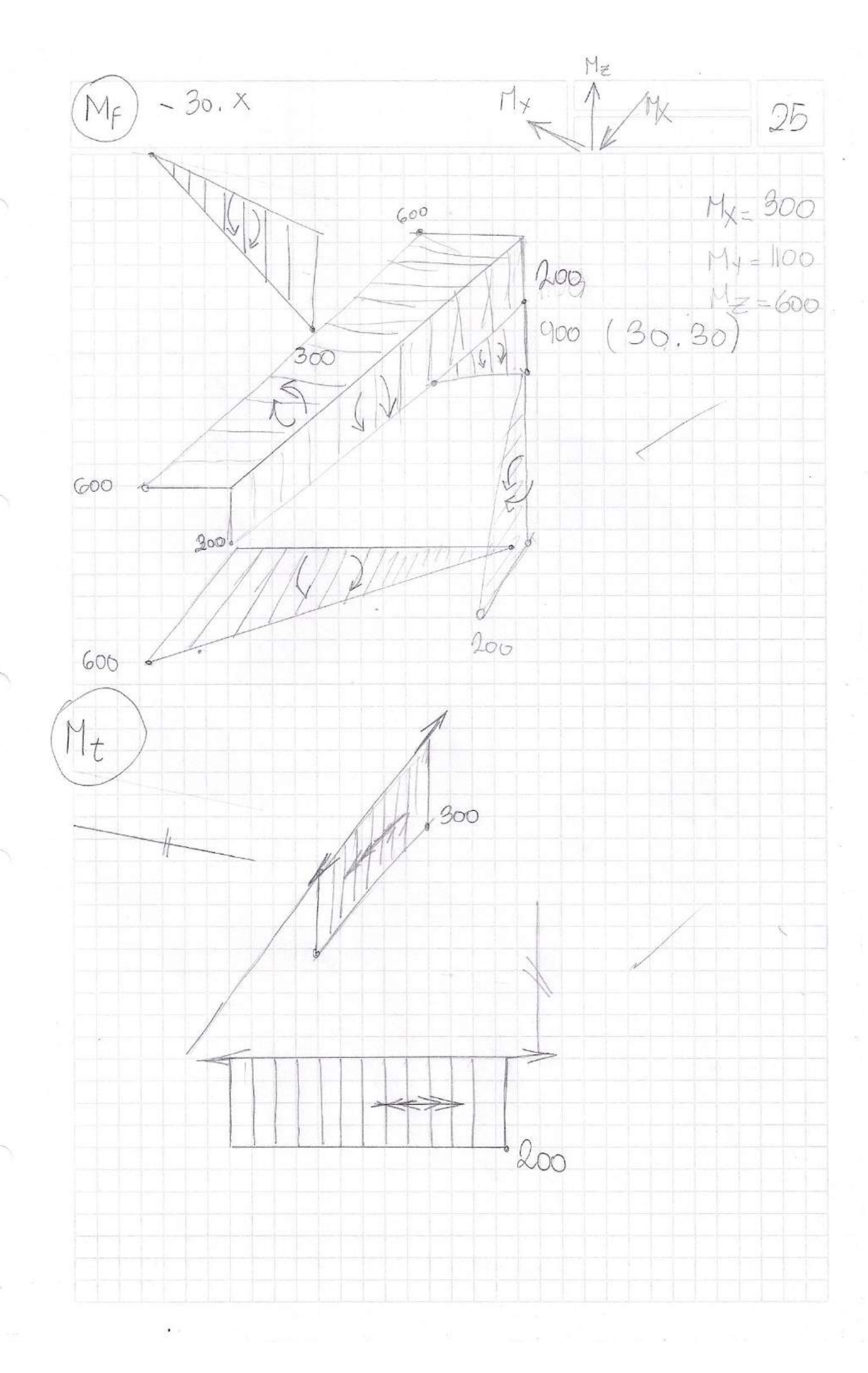
$\sum M^Z = B_Y \cdot 14 = 0 \rightarrow A_Y = 0$



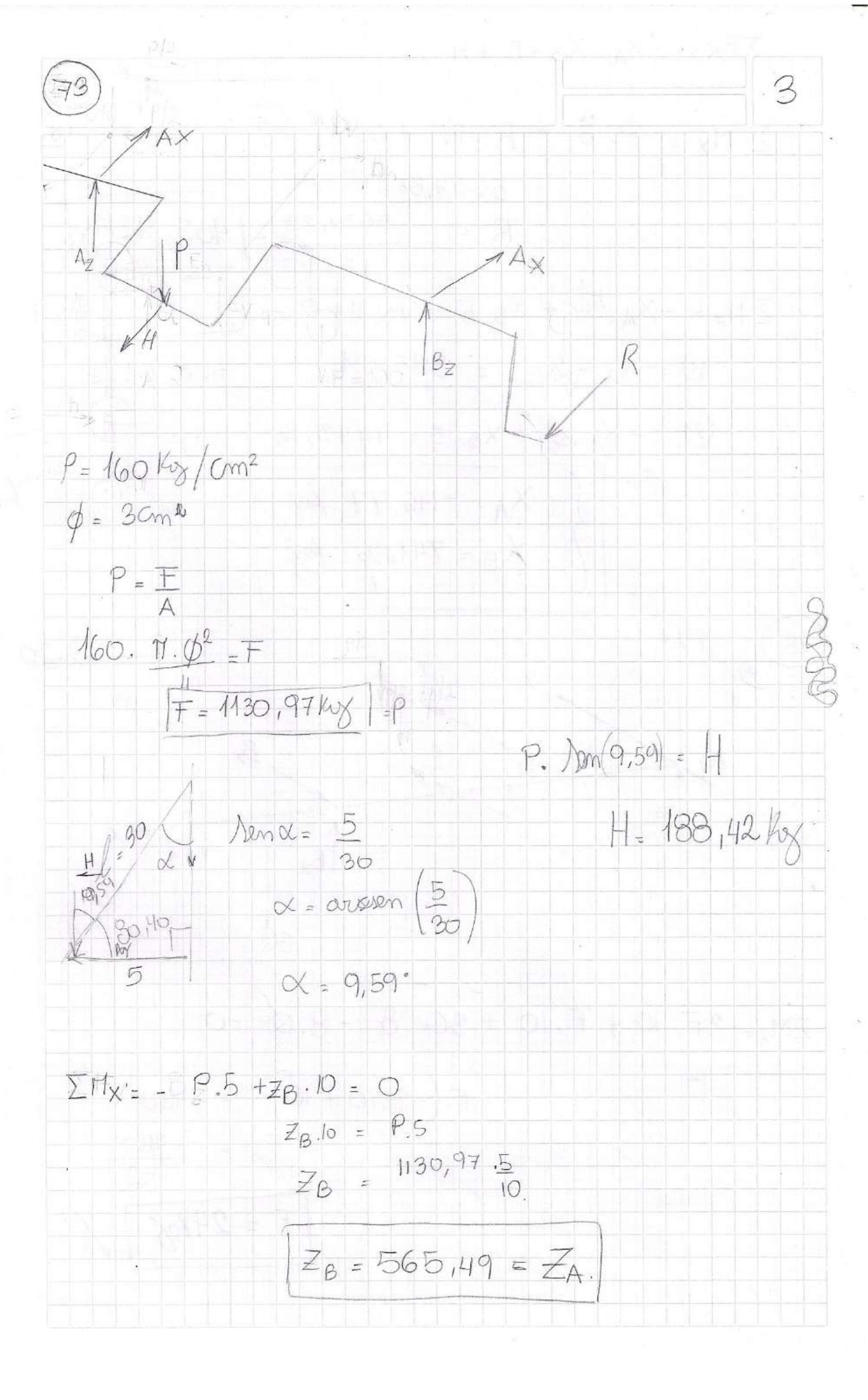
100
100
q = 10kg/m
60
20
N
100
Q
100
se traslada
40
40
40
20
60
20


Mf
24
400
400
80
240 = 60.4
60X
80
Mt
20
18
15
14
67
13,4
670.


67
30
20
N
20
Q
30
20
20



Mz
MF
- 30 . X
Mx
Mx
25
Mx = 300
My = 1100
Mz = 600
600
200
900
(30 . 30)
300
600
200
600
200
Mt
300
200



$P = 160\ Kg/cm^2$

$\phi = 3cm^2$

$P = \frac{F}{A}$

$160 \cdot \frac{\pi \cdot \phi^2}{4} = F$

$\boxed{F = 1130{,}97\ Kg} = P$

$sen\ \alpha = \frac{5}{30}$

$\alpha = arcsen\left(\frac{5}{30}\right)$

$\alpha = 9{,}59°$

$P \cdot sen(9{,}59) = H$

$H = 188{,}42\ Kg$

$\Sigma M_{x'} = -P \cdot 5 + Z_B \cdot 10 = 0$

$Z_B \cdot 10 = P \cdot 5$

$Z_B = 1130{,}97 \cdot \frac{5}{10}$

$\boxed{Z_B = 565{,}49 = Z_A}$

$\Sigma F_X = -X_A - X_B + R + H$

$\Sigma M_y = P \cdot 5 - R \cdot 14 = 0$

$5654,85 = R \cdot 14$

$R = \dfrac{5654,85}{14} = \boxed{403,92 Kg}$

$\Sigma M_z = -X_A \cdot 5 + X_B\, 5 - R \cdot 11 = 0$

① $-X_A - X_B = -595,09$

② $-X_A \cdot 5 + X_B \cdot 5 = 4443,12$

$$\begin{cases} X_A = -146,77 \text{ Kg} \\ X_B = 741,86 \text{ Kg} \end{cases}$$

(78) a)

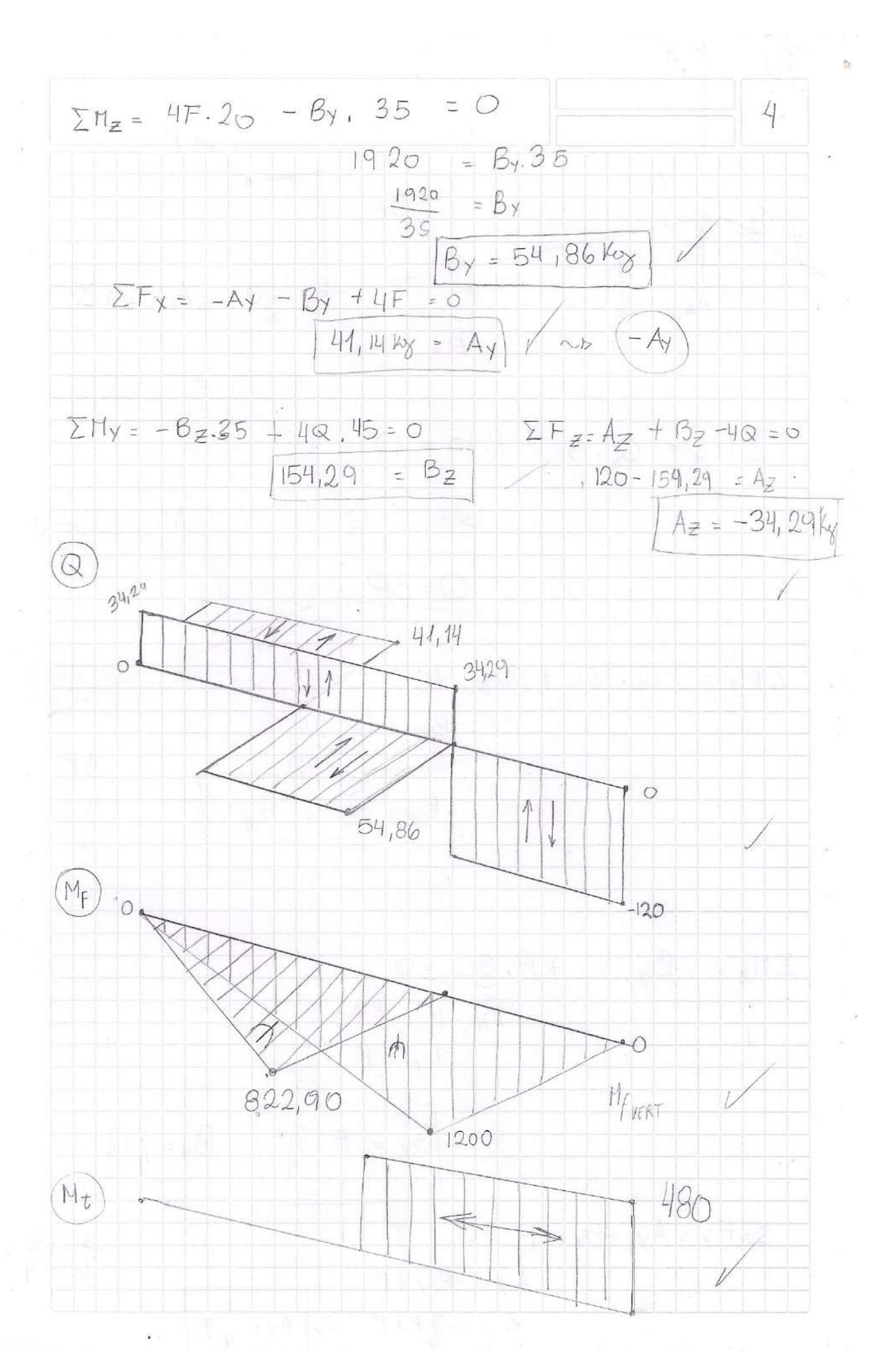
$Q = 20$

$\Sigma M_x = -3F \cdot 10 + F \cdot 10 + 3Q \cdot 8 - 8 \cdot Q = 0$

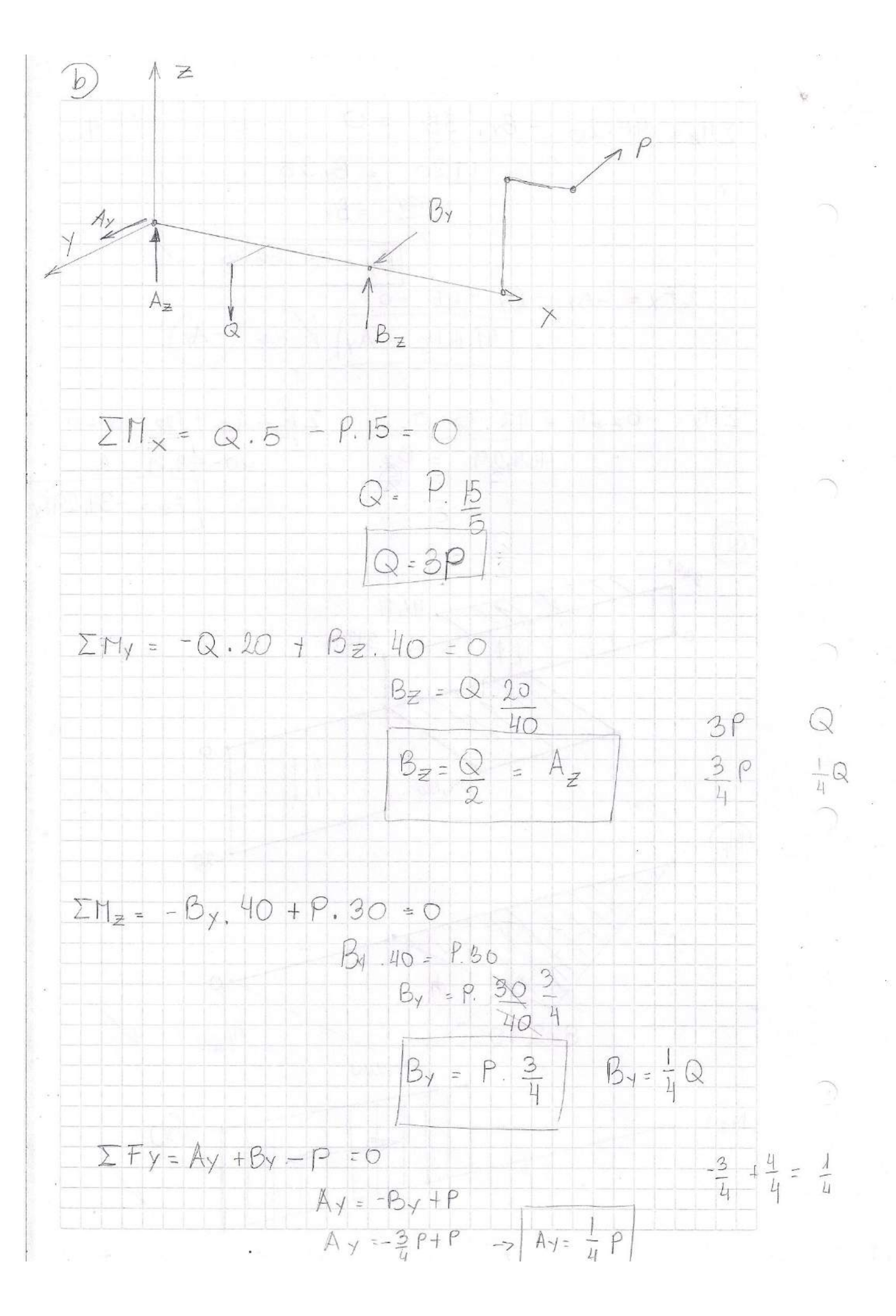
$F(-3 \cdot 10 + 10) = -480$

$F = \dfrac{-480}{-20}$

$\boxed{F = 24 Kg}$



4
ΣMz = 4F·20 − By · 35 = 0
1920 = By·35
1920/35 = By
By = 54,86 kg
ΣFx = −Ay − By + 4F = 0
41,14 kg = Ay
~> (−Ay)
ΣMy = −Bz·35 + 4Q · 45 = 0
154,29 = Bz
ΣFz = Az + Bz − 4Q = 0
120 − 154,29 = Az
Az = −34,29 kg
Q
34,29
41,14
0
34,29
54,86
0
−120
MF
0
822,90
1200
0
MfVERT
Mt
480



$$\sum M_x = Q \cdot 5 - P \cdot 15 = 0$$

$$Q = P \cdot \frac{15}{5}$$

$$\boxed{Q = 3P}$$

$$\sum M_y = -Q \cdot 20 + B_z \cdot 40 = 0$$

$$B_z = Q \cdot \frac{20}{40}$$

$$\boxed{B_z = \frac{Q}{2} = A_z}$$

$3P \quad Q$

$\frac{3}{4}P \quad \frac{1}{4}Q$

$$\sum M_z = -B_y \cdot 40 + P \cdot 30 = 0$$

$$B_y \cdot 40 = P \cdot 30$$

$$B_y = P \cdot \frac{30}{40} \frac{3}{4}$$

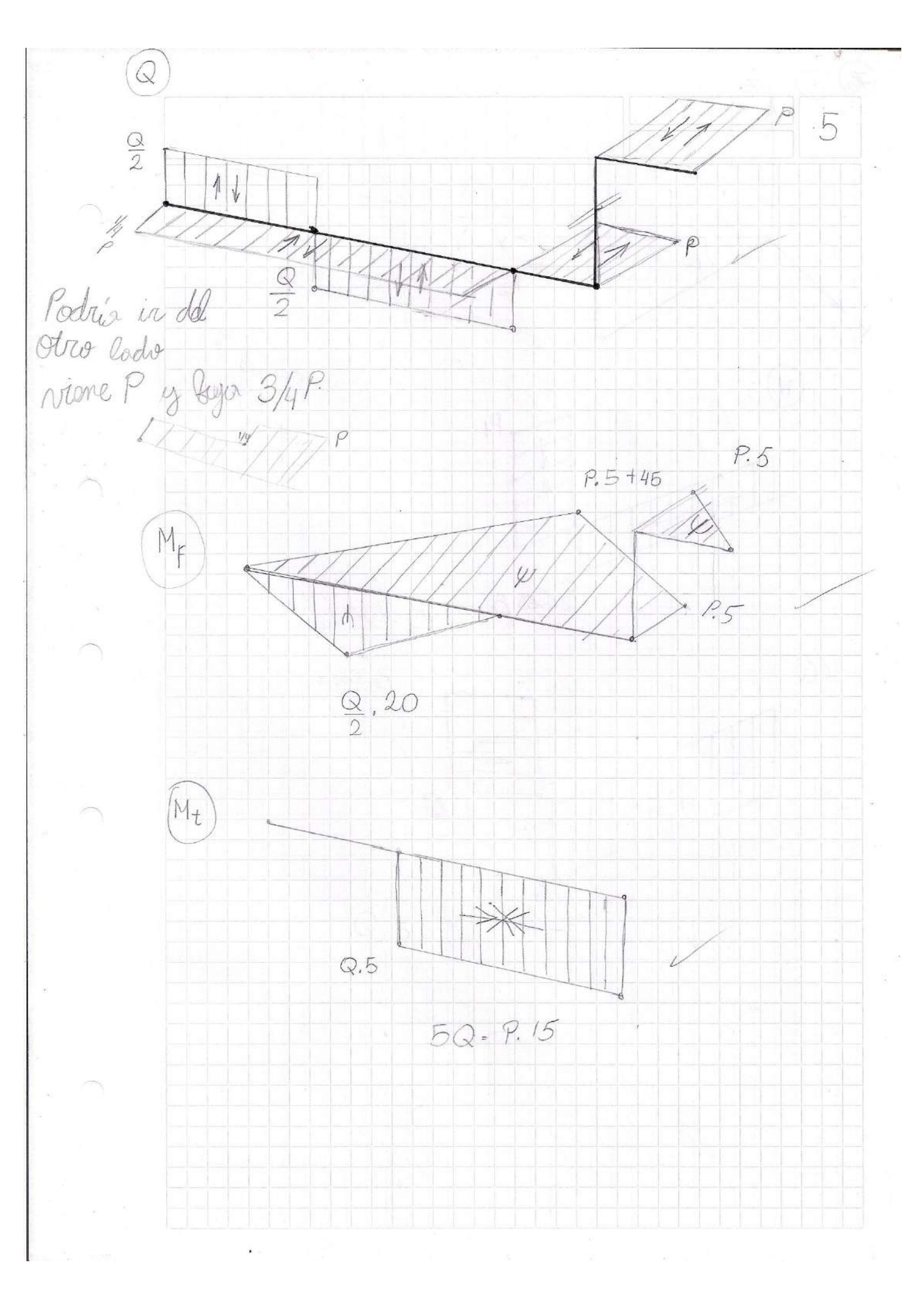
$$\boxed{B_y = P \cdot \frac{3}{4}} \quad B_y = \frac{1}{4}Q$$

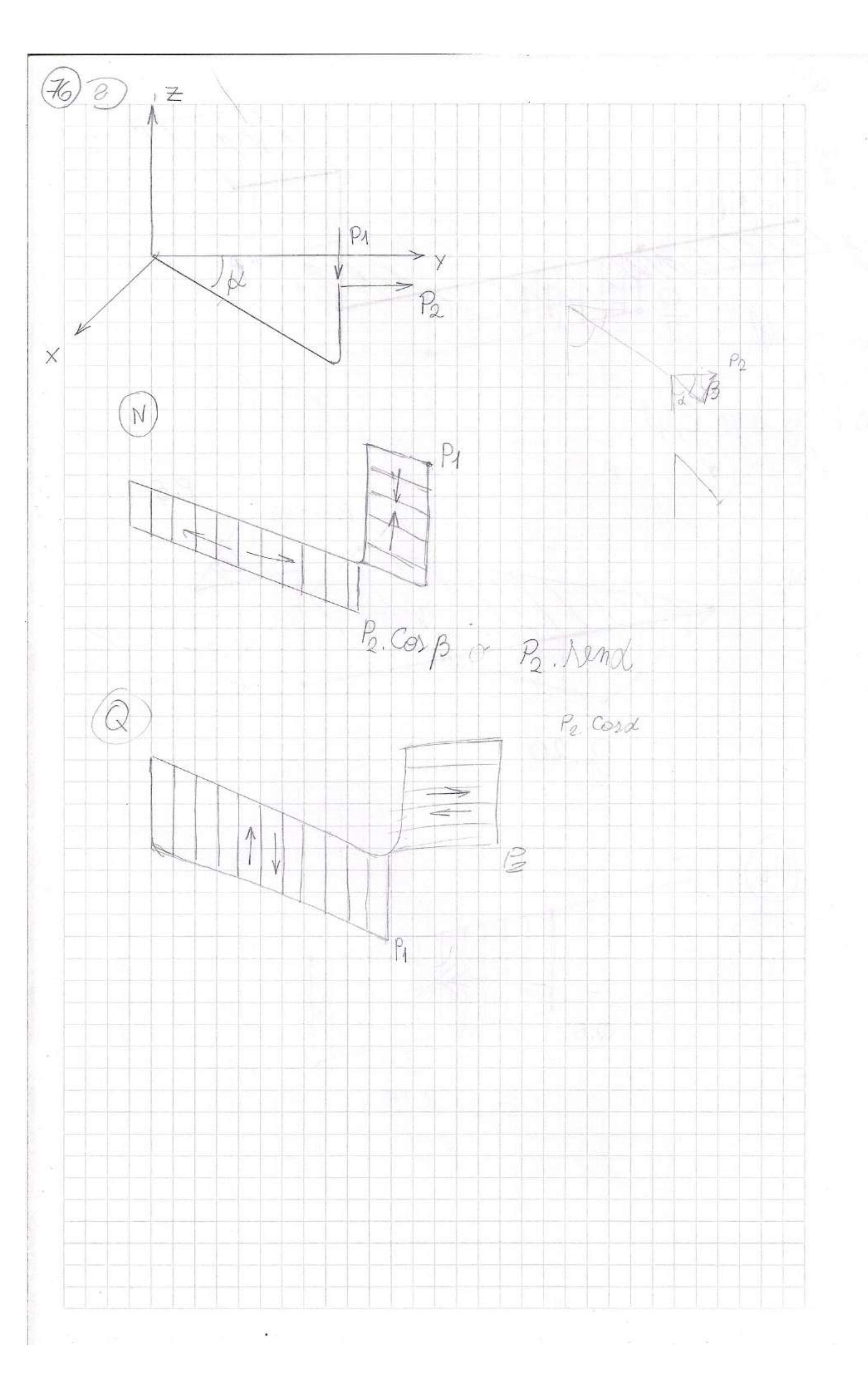
$$\sum F_y = A_y + B_y - P = 0$$

$$A_y = -B_y + P$$

$$A_y = -\frac{3}{4}P + P \rightarrow \boxed{A_y = \frac{1}{4}P}$$

$-\frac{3}{4} + \frac{4}{4} = \frac{1}{4}$


Q
5
Q/2
P
1/4 P
Q/2
P
Podría ir del
otro lado
viene P y baja 3/4 P
1/4
P
P.5
P.5 +45
Mf
P.5
Q/2 . 20
Mt
Q.5
5Q = P.15


76
Z
Y
X
P1
P2
α
β
N
P1
P2. Cos β
P2. Senα
Q
P2. Cosα
P1
P2